МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ІМОВІРНІСНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ ДАНИХ

ПРАКТИКУМ.ЧАСТИНА 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю171 «Електроніка»,
спеціалізацією «Електронні та інформаційні технології кінематографії та аудіовізуальних систем»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Імовірнісні основи обробки даних: Практикум. Частина 1. Основи теорії ймовірностей [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні та інформаційні технології кінематографії та аудіовізуальних систем» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.:Н.Ю. Філіпова, Власюк Г.Г. – Електронні текстові данні (1 файл: 3,2 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 115 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 29.03.2018 р.) за поданням Вченої ради ФЕЛ (протокол № 03/2018 від 26.03.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ІМОВІРНІСНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ ДАНИХ

ПРАКТИКУМ. ЧАСТИНА 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

Укладачі: *Філіпова Наталія Юріївна*, канд. техн. наук.
Власюк Ганна Григорівна, проф. д-р. техн. наук

Відповідальний редактор *Лазебний В. С.*,доцент, канд..техн.наук., доцент

Рецензенти: *Дрозденко О. І.,* доцент, канд. техн. наук, доцент

Навчальний посібник є збірником задач, а також керівництвом до практичного використання основних методів їх розв’язку з дисципліни «Ймовірнісні основи обробки даних». Завдяки практикуму у студентів є можливість засвоїти матеріал дисципліни, готуватися до практичних занять шляхом виконання самостійної роботи у вигляді вирішення задач конкретної тематики та вивчати теоретичний матеріал з дисципліни «Ймовірнісні основи обробки даних» спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізація «Електронні та інформаційні технології кінематографії та аудіовізуальних систем». В практикумі представлені задачі з розв’язком, надані відповіді до запропонованих задач та наведені таблиці значень основних функцій.

ВСТУП

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності в випадкових явищах. Випадкове явище – це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж досліду протікає щораз дещо по-іншому.

Приклади випадкових явищ:

1. Проводиться стрільба з гармати, встановленого під заданим кутом до горизонту. Користуючись методами зовнішньої балістики (науки про рух снаряда в повітрі), можна знайти теоретичну траєкторію (криву) снаряда. Ця траєкторія цілком визначається основними умовами стрільби: початковою швидкістю, кутом кидання і балістичним коефіцієнтом снаряда. Фактична траєкторія кожного окремого снаряда неминуче дещо відхиляється від теоретичного за рахунок сукупного впливу таких факторів, як помилки виготовлення снаряда, відхилення ваги заряду від номіналу, неоднорідність структури заряду, помилки установки стовбура в задане положення, метеорологічні умови т.д. Якщо зробити кілька пострілів при незмінних основних умовах, вийде не одна теоретична траєкторія, а цілий пучок, або «сніп», траєкторій, що утворюють так зване «розсіювання снарядів».

2. Те саме тіло кілька разів зважується на аналітичних вагах; результати повторних зважувань дещо відрізняються один від одного. Ці відмінності обумовлені впливом багатьох другорядних факторів, які супроводжують операцію зважування, таких як положення тіла на чашці терезів, випадкові вібрації апаратури, помилки відліку показань приладу і т.д.

3. Літак робить політ на заданій висоті. Теоретично він летить горизонтально, рівномірно і прямолінійно. Фактично ж політ супроводжується відхиленнями центру маси літака від теоретичної траєкторії і коливаннями літака біля центру маси. Ці відхилення і коливання є випадковими і пов'язані з турбулентністю атмосфери; від разу до разу вони не повторюються.

4. Проводиться ряд вибухів осколкового снаряду в певному положенні відносно цілі. Результати окремих вибухів дещо відрізняються один від одного: змінюються загальне число осколків, взаємне розташування їх траєкторій, вага, форма і швидкість кожного окремого осколка. Ці зміни є випадковими і пов'язані з впливом таких чинників, як неоднорідність металу корпусу снаряда, неоднорідність вибухової речовини, мінливість швидкості детонації і т.д. У зв'язку з цим різні вибухи, здійснені, начебто, в однакових умовах, можуть призводити до різних результатів: в одних вибухах ціль буде вражена осколками, в інших - ні.

У наведених прикладах основні умови досвіду, що визначають в загальних і грубих рисах їх перебіг, зберігаються незмінними, другорядні - змінюються від досвіду до досвіду і вносять випадкові відмінності в їх результати.

У будь-якому фізичному явищі в тій чи іншій мірі присутні елементи випадковості. У деяких завданнях випадковими елементами можна знехтувати і замість реального явища розглядати його спрощену схему (модель). Однак існують такі завдання, в яких другорядні, тісно переплітаються між собою випадкові фактори відіграють помітну роль, а разом з тим число їх настільки велике і вплив є істотним, що нехтування ними не виправдовує себе. Подібні завдання вимагають вивчення не тільки основних, головних закономірностей, що визначають явище в загальних рисах, але і аналізу випадкових збурень і спотворень, пов'язаних з наявністю другорядних факторів і надають результату досвіду при заданих умовах елемент невизначеності. Практика показує, що, спостерігаючи в сукупності маси однорідних випадкових явищ, ми зазвичай виявляємо в них закономірності, свого роду стійкості, властиві саме випадковим масовим явищам.

Якщо багато разів поспіль кидати монету, то частота появи герба поступово стабілізується, наближаючись до половини числа кидків.

Властивість «стійкості частот» виявляється і при багаторазовому повторенні будь-якого іншого досвіду, результат якого представляється раніше невизначеним, випадковим. Методи теорії ймовірностей за природою пристосовані тільки для дослідження випадкових масових явищ; вони не дають можливості передбачити результат окремого випадкового явища, але дозволяють передбачити середній сумарний результат маси однорідних випадкових явищ. Чим більша кількість однорідних випадкових явищ бере участь в завданні, тим чіткіше і чіткіше проявляються властиві їм специфічні закони, тим з більшою впевненістю і точністю можна здійснити науковий прогноз. Вивчення законів випадкових масових явищ дозволяє не тільки здійснювати науковий прогноз у своєрідній області випадкових явищ, але в ряді випадків допомагає цілеспрямовано впливати на хід випадкових явищ, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати її вплив на практичний результат.

В даний час немає майже жодної природної науки, в якій так чи інакше не застосовувалися б імовірнісні методи. Усе ширшого застосування набули імовірнісні методи в сучасній електротехніці і радіотехніці, метеорології і астрономії, теорії автоматичному регулювання та машинної математики, телекомунікація, обробці музики та мови.

Короткий історичний нарис

Виникнення теорії ймовірностей відносять до XVII в. і пов'язують з рішенням комбінаторних задач теорії азартних ігор і потребами страхової справи: азартні ігри стимулювали спочатку побудова математичних моделей ігрових ситуацій, які давали гравцеві можливість робити розрахунок ставок, оцінювати шанси виграшу; в страховій справі необхідно було заздалегідь спланувати витрати і доходи страхових компаній, щоб в результаті їх діяльності ці компанії не понесли збитки.

Ідеї побудови імовірнісних моделей були закладені ще в роботах Б. Паскаля (1623-1662), П. Ферма (1601-1665), Х. Гюйгенса (1629-1695). Основи сучасної класичної теорії ймовірностей були сформульовані в роботах Я. Бернуллі (1654-1705), А. Муавра (1667-1751), П. Лапласа (1749-1827), С. Пуассона (1781-1840), К.Гаусса (1777-1855), Т. Байеса (1702-1761). Їх роботи були викликані потребами таких наук, як астрономія, геодезія, військова справа і ін. В результаті з'явилися нові математичні дисципліни: основи теорії інформації, теорія надійності, теорія помилок і ін.

Творцем російської школи теорії ймовірностей був П.Л. Чебишев (1821-1894). Роботи вчених цієї школи А.А. Маркова (1856-1922), А.М. Ляпунова (1857-1918) висунули російську школу теорії ймовірностей на перше місце в світі.

Радянська школа, представлена вченими С.Н. Бернштейном (1880-1968), А.Я. Хінчіним (1894-1959), АН. Колмогоровим, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирновим (1900-1966), Ю.В. Линником (1915-1972), Ю.В. Прохоровим, А.В. Скороходом, Л.Н. Больщева і іншими, ще більше зміцнила репутацію російських вчених у світовій науці.

Незважаючи на широке застосування теорії ймовірностей в техніці, її довгий час не можна було назвати математичною дисципліною, так як в ній не було математично визначено поняття ймовірності. Тільки в 1933 р А.Н. Колмогоров в роботі «Основні поняття теорії ймовірностей »дав аксіоматична побудова теорії ймовірностей, після чого теорія ймовірностей стала суворої математичної наукою. В цей же час на основі теорії ймовірностей виникла нова дисципліна - математична статистика, що має в даний час широке застосування у фізиці, економіці, соціології і т.д. В області математичної статистики основні результати, що стали класичними, були отримані вченими англо-американської школи (К.Пірсона, Р. Фішер, Ю.Нейман, А.Вальд, Ф.Вілкоксон, І.Дуб, В.Феллер, Е.Леман, М.Лоев і ін.).

В подальшому були створені інші математичні дисципліни: теорія випадкових процесів, теорія планування експериментів, теорія масового обслуговування. У нашій країні в різних містах були створені науково-дослідні центри, в яких сконцентровані дослідження в області теорії ймовірностей: м Москва (АН. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Ю.В. Прохоров, Б.А. Севастьянов, Ю.А. Розанов, В.Н. Тутубалин і ін.), М С.-Петербург (Ю.В. Линник, І.І. Ібрагімов, ВВ. Петров), Новосибірськ (А.А. Боровков).

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1 Основні поняття

Визначення 1. *Елементарним результатом експерименту є кожен реально зафіксований або теоретично можливий результат експерименту. У відповідність кожному елементарному результату надамо його позначення* ω_i

Визначення 2. *Безліч усіх можливих взаємовиключних результатів* ω_i *у будь-якому експерименті – простір* Ω *елементарних результатів. Таким чином,* $\omega_i \in \Omega$

Приклади 1.1-1.5 За указаними дослідами побудувати простір Ω елементарних результатів

1.1 Підкидається кубик; спостерігаємий результат (с.р.) – число, яке випало на верхній грані кубика.

Відповідь: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

1.2 Двічі підкидається монета; с. р. – поява цифри або герба на верхній стороні монети.

Відповідь: Ω = {гг, цц, гц, цг}

1.3 Протягом часу Т на телефонній станції будуть фіксуватися виклики; с. р. – число викликів за даний проміжок часу Т.

Відповідь: $\Omega = \{1,2,\dots,n\}$

1.4 Підкидається монета до випадання двох гербів поспіль; с. р. – число підкидань монети

Відповідь: $\Omega = \{2,\dots,n,\dots\}$

1.5 Виконується радіолокаційне виявлення цілі; с. р. – стан сяючої плями на екрані індикатора цілі, яка має форму кола радіуса 10 см в декартовій системі координат з початком, який збігається з центром екрана.

Відповідь: $\Omega = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 100\}$

Визначення 3. *Подією А називається будь-яка підмножина* $A \subset \Omega$ *простору елементарних результатів.*

Визначення 4. *Якщо експеримент закінчився одним з елементарних фіналів* ω_i*, який входить в безліч А:* $\omega_i \in A$*, то вважається, що подія А наступила.*

Приклади 1.6-1.11 Записати простір Ω елементарних результатів, підмножини, відповідні вищевказаним подіям.

1.6 Двічі підкидається гральний кубик; с. р. – пара чисел, відповідних числу очок, що випали перший та другий раз. Розглядаються події:
A – обидва рази випало число очок, кратне трьом;
B – число 6 не випало жодного разу;
C – обидва рази випало число очок, більше за 3;
D – обидва рази випало однакове число очок.
Розв'язок:
Нехай ω_{ij} означає i очок, що випали у перший раз, та j очок, що випали у другий раз. Тоді
$\Omega = \{\omega_{ij}\}$, $i, j = \underline{1,\ 6}$; n=36 – число усіх елементарних результатів;
A = $\{\omega_{33}, \omega_{36}, \omega_{63}, \omega_{66}\}$, m_A=4 – число елементарних результатів, що входять у подію A;
B = $\{\omega_{ij}\}$, i, j=$\underline{1,5}$; m_B=25 – число елементарних результатів, що входять у подію B;
C = $\{\omega_{ij}\}$, i, j=$\underline{4,6}$; m_C=9 – число елементарних результатів, що входять у подію C;
D = $\{\omega_{ii}\}$, i=$\underline{1,6}$; m_D=6 – число елементарних результатів, що входять у подію D.

1.7 Тричі підкидається монета. С. р. – одночасна поява гербів або (і) цифр на верхній стороні монети в результаті триразового підкидання монети. Розглядають такі події:
A – герб випав 1 раз;
B – цифра не випала жодного разу;
C – гербів випало більше, ніж цифр;
D – герб випав не менше, чим 2 рази поспіль.
Розв'язо:
Ω = {ггг, ггц, гцг, цгг, гцц, цгц, ццг, ццц}; n=8 – число усіх елементарних результатів;
A = {гцц, цгц, ццг}; m_A=3 – число елементарних результатів, що входять у подію A;
B = {ггг}; m_B=1 – число елементарних результатів, що входять у подію B;
C = {ггц, гцг, цгг, ггг}; m_C=4 – число елементарних результатів, що входять у подію C;
D = {ггц, цгг, ггг}; m_D=3 – число елементарних результатів, що ходять у подію D.

1.8 Підкидається монета до першої появи герба; с. р. – число підкидань монети. Розглядаються події:
A – герб випав при третьому підкиданні;
B – герб випав не раніше третього підкидання
Відповідь: $\Omega = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$; $A=\{3\}$; $B=\{3, 4, \ldots, n, \ldots\}$.

1.9 Проводиться радіолокаційне виявлення цілі; с. р. – положення плями, що світиться на екрані індикатора цілі, що має форму кола радіуса 10 см в декартовій системі координат з початком, який збігається з центром екрана. Розглядаються такі події:
A – ціль знаходиться у першому квадранті;
B – ціль знаходиться у колі радіуса 5 см з центром, який лежить на початку координат;
C – ціль знаходиться в колі радіуса 2,5 см з центром, який зсунутий у від'ємному напрямку, уздовж осі абсцис.
Відповідь: $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 100\}$
$A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 100\}$
$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5^2\}$
$C = \{(x, y) : (x+5)^2 + y^2 \leq 2{,}5^2\}$

1.10 На відрізку [a, b], що лежить на числовій осі, навмання вибирається точка з координатою x, після чого на відрізку $[a, x]$,
Навмання вибирається друга точка з координатою y. С. р. – пара чисел(x, y). Розглядаються такі події:
A – друга точка ближче до b, ніж перша точка до a;
B – відстань між двома точками, x та y, менша за половину довжини відрізка;
C – перша точка ближче до другої точки, ніж до b.
Розв'язок:
$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b$ та $a \leq y \leq x\}$. Для події A $b - y < x - a$. Таким чином, події A відповідає безліч точок на площині, координати яких будуть задовольнять системі нерівностей

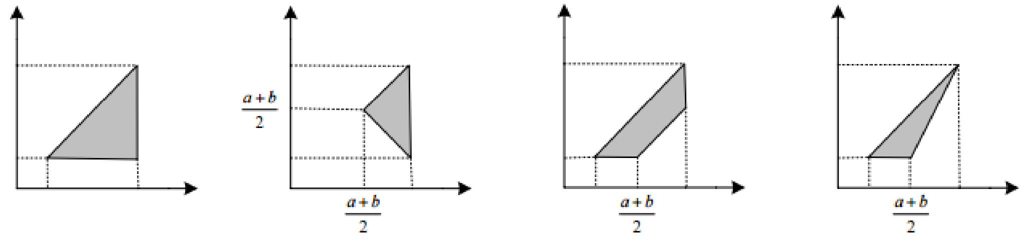
$$\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x, y > -x + a + b.$$

Для події B $x - y < \frac{b-a}{2}$. Таким чином, події B відповідає безліч точок на площині, координати яких задовольняють системі нерівностей:

$$\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x, y > x - \frac{b-a}{2}.$$

Для події C $x - y < b - x$. Таким чином, події C відповідає безліч точок на площині, координати котрих задовольняють системі нерівностей:

$$\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\, y > 2x - b.,$$



1.11 Петро та Іван домолись про зустріч в певному місці між 11 та 12 годинами. Кожен з них приходить і чекає до закінчення години, але не більше ніж 15 хвилин. С. р. – пара чисел (x, y), де x – час, коли прийшов Петро, y – час приходу Івана (у хвилинах після 11 години). Розглядаються такі події:
A – зустріч відбулась;
B – зустріч не відбулась;
C – Івану не довелось чекати Петра;
D – зустріч відбулась після 11 г. 30 хв;
E – Іван запізнився;
F – зустріч відбулась, коли до закінчення часу залишалось менше ніж 5 хвилин.

Визначення 5. *Подія A є достовірною, якщо* $\mathrm{A} = \Omega$.

Визначення 6. *Подія A є неможливою, якщо* $\mathrm{A} = \emptyset$.

Визначення 7. *Подія* $\underline{\mathrm{A}}$ *є протилежною події* A, *якщо* $\underline{\mathrm{A}} = \{\omega_i \epsilon\, \Omega: \omega_i \notin A\}$,

$\underline{\Omega} = \emptyset, \underline{\emptyset} = \Omega, \bar{\bar{A}} = A$.

1.2 Лапласовський метод завдання ймовірності

1.2.1 Безпосереднє обчислення ймовірності

Метод Лапласа завдання ймовірності ґрунтується на припущені про рівно можливі настання будь-якого з кінцевого числа елементарних результатів. Такий підхід вперше виник при обчисленні шансів у азартних іграх.

Нехай Ω *- простір, який складається з* n *елементарних результатів, A – подія, що складається з* m *елементарних результатів (сприяють настанню події A). Ймовірністю події A називається число, що позначається P(A):*

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

З визначення випливає, що $0 \le P(A) \le 1,\ P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0.$
Підрахунок чисел n *і* m *елементарних результатів ґрунтується на правилах множення і складання числа способів виконання певних дій.*

Правило множення. *Нехай потрібно виповнить операцію, яка складається з* k *дій, при тому що першу дію можна виповнить* n_1 *способами, другу -* n_2 *способами, і так до* k*-ї дії, яку можна виконати* n_k *способами. Тоді таку операцію можна виконати* $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ *способами.*

1.12 В групі 30 осіб. Спочатку потрібно вибрати старосту групи, а потім його заступника. Скількома способами це можна зробити?
Розв'язок:
У цій задачі потрібно виповнить дві дії: вибрати старосту, а потім його заступника. Першу дію можна виповнити 30 способами, а другу – 29 способами. За правилом множення старосту и його заступника можна вибрати 30*29=870 способами.

1.13 Чотирьох хлопчиків і чотирьох дівчаток потрібно розсадити на вісім стільців, причому хлопчиків потрібно посадити на стільці з парними номерами, а дівчат – з непарними номерами. Скількома способами це можна зробити?
Розв'язок:
У цій задачі треба виконати дві дії: розсадити хлопчиків та дівчат. Для того щоб розсадити 4 хлопчиків, потрібно виконати 4 дії: посадити кожного з них. Першого (любого) хлопчика можна посадити чотирма способами, другого - трьома, третього – двома, четвертого – одним. Отже, за правилом множення хлопчиків можна розсадити 4*3*2*1=24 способами. Стількома ж способами можна розсадити дівчат. Ще раз використавши правило множення, отримаємо, що чотирьох хлопчиків та чотирьох дівчат можна розсадити 24*24=576 способами.

1.14 У класі вивчають 10 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на навчальний день, який складається з 6 різних уроків?
Розв'язок:
Для того щоб скласти розклад, потрібно виповнити 6 дій, відповідних порядковому номеру уроків. Першим уроком можна поставити будь-який з 10 предметів, тобто першу дію можна виконати 10-ма способами, другу – 9-ма способами, третю – 8, четверту – 7, п'яту – 6 і шосту – 5-ма способами. Застосувавши правило множення, отримаємо, що розклад з 6 уроків можна скласти 10*9*8*7*6*5=151200 способами.

1.15 Скільки п'ятизначних чисел:
1) діляться на 5;

2) однаково читаються зліва направо, та навпаки?

Розв'язок:

1) Для того щоб скласти п'ятизначне число потрібно виповнити п'ять дій, відповідних вибору цифр, розташованих на різних місцях. Першу цифру можна вибрати 9-ма способами, виключаючи нуль; другу, третю та четверту – 10-ма способами кожну; п'яту – двома способами, користуючись ознакою ділення цілого числа на п'ять. Отже, число п'ятизначних чисел, що діляться на п'ять, дорівнює 9*10*10*10*2=18000.

2) Цифри таких чисел повинні бути симетричні щодо середньої цифри кожного числа, тоді для складання цих чисел досить виконати три дії – вибрати перші три цифри. Першу можна вибрати 9-ма способами, другу та третю – 10-ма способами кожну. Отже, таких чисел 9*10*10=900.

Правило додавання. *Нехай потрібно виконати операцію, що складається з* k *дії, що взаємно виключають одна одну, причому першу дію можна виконати* n_1 *способами, другу -* n_2 *способами, і так до* k*-ї дії, яку можна виконати* n_k *способами. Тоді таку операцію можна виконати* $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ *способами.*

1.16 Є 20 виробів першого сорту та 30 виробів другого. Необхідно вибрати два вироби одного сорту. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язок:

Вихідна операція – вибір двох виробів одного сорту – складається з двох дій: вибрати два вибори першого сорту або два вироби другого сорту. Першу дію за правилом множення можна виконати 20*19=380 способами, другу – 30*29=870 способами. Тепер можна застосувати правило складання та отримати відповідь : 380+870=1250.

1.17 Автомобільні номера повинні складатись з 1 або 2 або 3 букв та 4 цифр. Знайти число усіх таких номерів, використовуючи 30 букв російського алфавіту.

Роз'язок:

Кожен номер повинен складатись з 1 або 2, або 3 букв та 4 цифр, отже, щоб скласти номер, потрібно виконати дві дії: перша – обрати 1,2 або 3 букви з 30 букв, друга – обрати 4 цифри з 10. Для обчислення числа способів першої дії спочатку потрібно застосувати правило множення, а потім правило складання: 30+30*30+30*30*30=27930. Для того щоб знайти число способів виконання другої дії, потрібно застосувати правило множення: 10*10*10*10=10000. Застосував ще раз правило множення, отримаємо відповідь: 27930*10000+279300000.

Наведемо декілька прикладів на обчислення ймовірностей подій, в яких використовуються правила множення та складання для підрахунку числа елементарних результатів.

Пропонується наступний алгоритм розв'язку задач на обчислення ймовірності подій:

1) з'ясувати, в чому полягає експеримент(досвід) і елементарний результат(с. р.);

2) знайти число n усіх елементарних результатів;

3) знайти число m елементарних результатів, що сприяють події (що входять в подію) А;

4) для обчислення ймовірності події А застосувати формулу

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

1.18 До магазину поступило 30 кольорових телевізорів, серед яких 5 мають приховані дефекти. Знайти ймовірність того, що навмання взятий для перевірки телевізор не має прихованих дефектів.

Розв'язок:

Експеримент заключається у випадковому вибору одного телевізора з 30, а елементарним результатом буде обраний телевізор. Отже число усіх елементарних результатів буде дорівнювати 30, тобто $n = 30$. Подія А: навмання взятий телевізор не має прихованих дефектів. Так як, відомо, що число телевізорів, які не мають прихованих дефектів, дорівнює 25, то m = 25. Отже $P(A) = \frac{5}{6}$.

1.19 Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірність наступних подій:

А – число очок дорівнює 6;	Відповідь:1/6.
В – число очок ділиться на 3;	Відповідь:1/3.
С – число очок парне;	Відповідь:1/2.
D – число очок менше 5;	Відповідь:2/3.
Е – число очок більше 2.	Відповідб:2/3.

1.20. Два гральних кубика підкидаються одночасно. Знайти ймовірності наступних подій:

A - числа очок на обох кубиків збігаються;

B - число очок на першому кубику більше, ніж на другому;

З - парна сума очок;

D - сума очок більше двох;

E - сума балів не менше п'яти;

F - хоча б на одному кубику з'явиться цифра 6;

G - добуток чисел очок, що випали дорівнює 6.

Розв'язок:

Експеримент полягає в одноразовому підкиданні двох гральних кубиків одночасно. Елементарний результат - пара чисел, що випали на верхніх гранях обох кубиків. Число n всіх елементарних результатів дорівнює 6·6 = 36. Нехай m_A - число елементарних результатів, що сприяють події *A*. Тоді m_A = 6 и *P(A)*=1/6. Нехай m_B – число елементарних результатів, що сприяють події *B*. Якщо на першому кубику випаде число два, то на іншому кубику успішний результат один, якщо на першому кубику випаде число три, то на іншому кубику сприятливих результатів два, і т.д. Тоді, застосовуючи правило додавання, отримаємо, що m_B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 і *P(B)* = 5/12. Пропонуємо ймовірності інших подій обчислити самостійно. Наведемо лише відповіді: *P(C)*= 1/2, *P(D)* = 35/36, *P(E)* = 1/6, *P(F)* = 11/36, *P(G)* = 1/9.

1.21. На шахову дошку випадковим чином послідовно ставлять дві тури - білу і чорну. Яка ймовірність того, що тури не поб'ють один одного.

Розв'язок:

Експеримент полягає у випадковій послідовній розстановці двох тур на шахову дошку. Елементарний результат – випадкове розташування двох тур на шаховій дошці. Число всіх елементарних результатів можна знайти за правилом добутку. Першу туру можна розташувати 64 способами, другу - 63 способами, тоді *n* = 64 · 63= 4032. Нехай подія А означає, що обидві тури не поб'ють один одного, тоді, застосовуючи знову правило множення, отримаємо, що *m* = 64 (63 – 14) = 7168 і *P(A)* = 7/9.

1.22. Маємо пофарбований куб з усіх сторін, розпиляний на тисячу кубиків однакового розміру, які потім були ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик матиме забарвлених граней: а) одну; б) дві; в) три.

Відповідь: а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

1.23. Маємо 8 обчислювальних пристроїв, які обслуговується одним з 6 операторів. Знайти ймовірність того, що певні (вибрані раніше) 6 обчислювальних пристроїв будуть обслужені в першу чергу.

Розв'язок:

Експеримент – обслуговування 6 операторами 6 обчислювальних пристроїв з 8. Елементарний результат - випадковий вибір для обслуговування шести обчислювальних пристроїв з восьми. Перший оператор може вибрати для обслуговування обчислювальний пристрій вісьмома способами, другий оператор - сімома способами, третій - шістьома і т.д. Застосовуючи правило множення, отримаємо, що число всіх елементарних результатів рівно *n* = 8·7·6·5·4·3 = 20160. Нехай подія А означає, що будуть обслужені в першу чергу заздалегідь обрані 6 обчислюваних пристроїв, тоді перший оператор може вибрати для обслуговування обчислювальний пристрій шістьома способами, другий - п'ятьма способами, третій - чотирма і т.д. Застосовуючи правило множення, отримаємо, що m = 6·5· 4·3· 2·1=720 і *P(A)* = 1/28. У попередніх завданнях число елементарних результатів обчислювалося безпосередньо, тобто перебором всіляких варіантів. В багатьох завданнях безпосередній підрахунок числа елементарних результатів, навіть з застосуванням правил множення і складання числа способів, або важко, або неможливий через велику кількість різних варіантів, тому в таких випадках необхідно застосовувати формули з комбінаторики.

1.2.2. Елементи комбінаторики

Нехай дано безліч М, що складається з n елементів. сукупність m різних елементів з n називається з'єднанням з n елементів по m. Розрізняють три види з'єднань.

Сполучення

З'єднання з n елементів по m, що відрізняються одного від одного складом, тобто хоча б одним елементом, без урахування упорядкування цих елементів, називаються сполученнями з n елементів по m. Число всіх різних поєднань з n елементів по m позначається C_n^m*:*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}.$$

Властивості сполучень:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. $C_n^m = C_n^0 = 1$.
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
4. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

1.24. Потрібно вибрати одночасно трьох кандидатів з десяти на три однакові посади. Скількома способами можна вибрати кандитатів?
Розв'язок-відповідь: $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$.

1.25. У турнірі приймають участь *n* шахістів. Кожен учасник турніру грає з усіма іншими учасниками по одній партії. Скільки партій буде зіграно в цьому турнірі?
Розв'язок:

У кожній партії зустрічаються два шахіста, причому в різних партіях це різні пари учасників. Таким чином, число партій дорівнює числу сполучень з n по два, тобто $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.26. Скільки існує чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра менше (більше) попередньої?
Розв'язок:
Кожну четвірку з 10 різних цифр можна розташувати або в порядку їх зменшення, або зростання. У другому випадку набір з чотирьох цифр не повинен містити число нуль. Таким чином, у першому випадку число чотиризначних чисел рівне $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210,$ в другому $C_{10}^4 - C_9^3 = 210 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 126.$

1.27. Маємо 10 білих куль і 4 чорних. Скількома способами можна вибрати 7 куль таких, щоб серед них були 3 чорних?
Розв'язок.
Для того щоб отримати потрібний набір куль, слід виповнити дві дії: вибрати 4 білих і 3 чорних кулі. Першу дію можна виконати $C_{10}^4 = 210$ способами, друге – $C_4^3 = C_4^1 = 4$ способами. Тоді за правилом множення потрібний набір з 7 куль можна отримати 210· 4 = 840 способами.

1.28. Групу з 12 осіб потрібно розбити на дві підгрупи, в одній з яких має бути не більше 5 осіб, а в іншій не більше 9 осіб. Скількома способами це можна зробити?
Розв'язок:
Можливі три варіанти розбиття групи з 12 осіб на дві підгрупи: 5 і 7, 4 і 8, 3 і 9. Перший варіант можна здійснити $C_{12}^5 = 792$ способами, другий –$C_{12}^4 = 495$ способами, третій – $C_{12}^3 = 220$ способами. Застосовуючи правило додавання, отримаємо, що число всіх способів одно 792 + 495 + 220 = 1507.

1.29. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого шестикутника, якщо будь-які три з них не перетинаються в одній точці? Вирішити задачу для опуклого *n*–кутника.
Розв'язок-відповідь:$C_6^4 = C_6^2 = 12,\ C_n^4.$

1.30. Скільки способів вибірки з слова «вероятность» одночасно 3 приголосних і 2 голосних букви?
Розв'язок-відповідь:$C_6^3 \cdot C_4^2 = 120.$

1.31. У партії з 12 виробів 4 бракованих. Скількома способами можна вибрати 5 виробів, щоб серед них було 2 бракованих?
Розв'язок-відповідь: $C_4^2 \cdot C_8^3 = 336$.

1.32. Дві прямі лежать на паралельних площинах. На одній взято *n* точок, на інший - *m* точок. Скільки існує різних трикутників з вершинами в цих точках, що відрізняються хоча б однією вершиною?
Розв'язок-відповідь: $mC_n^2 + nC_m^2$.

Розміщення

З'єднання з n елементів по m, що відрізняються один від одного складом або (і) упорядкуванням цих елементів, називаються розміщення з n елементів по m. Число всіх різних розміщень з n елементів по m позначається A_n^m *і дорівнює:*

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

1.33. Скількома способами можна розсадити 4 чоловік на 25 стільцях?
Розв'язок-відповідь: $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$.

1.34. Скільки можна записати чотиризначних чисел, використовуючи без повторення всі десять цифр?
Розв'язок-відповідь:$A_{10}^4 - A_9^3 = A_9^4 = 5040 - 504 = 4536$.

1.35. Десять команд беруть участь у розіграші першості з футболу за три призові місця. Дві команди, які посіли останні два місця, не братимуть участь в наступній такій же першості. Скільки різних варіантів результатів першості може бути, якщо враховувати тільки положення перших трьох і останніх двох команд?
Розв'язок:
З постановки задачі випливає, що потрібно виконати дві дії: заповнити три перші призові місця і два останні місця. Першу дію можна виконати $A_{10}^3 = 720$ способами, другу $C_7^2 = 21$ способами. Застосовуючи правило множення, одержимо, що число всіх способів рівно 720·21 = 15120

1.36. Скільки існує семизначних телефонних номерів, відрізняючих тільки тим, що три останні цифри непарні і різні?
Розв'язок-відповідь: $A_5^3 = 60$.

1.37. У танцювальному залі знаходяться 8 дівчат та 6 хлопців. скільки можна скласти варіантів танцювальних пар дівчат з юнаками?

Розв'язок-відповідь: $A_8^6 = 20160$.

1.38. Скількома способами можна записати трьохзначне число з 10 різних цифр,що не повторяються.
Розв'язок-відповідь: $A_{10}^3 - A_9^2 = 648$.

Перестановки

З'єднання, що містять всі n різних елементів, називаються перестановками. Будь-які дві перестановки відрізняються порядком розміщення елементів. Число всіх різних перестановок позначається P_n *і одно* $P_n = n!$. *Можна відзначити, що числа сполучень, перестановок і розміщень зв'язані рівністю* $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$.

1.39. Завдання 1.35 про участь десяти команд у розіграші першості по футболу можна вирішити ще двома способами. *Перший спосіб*. Місця в першості з четвертого по восьмий можна розподілити $C_{10}^5 = 252$ способами. Два останні – $C_5^2 = 10$ способами. Три призові місця – $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ способами. За правилом множення отримаємо, що число всіх варіантів результату першості рівно $252 \cdot 10 \cdot 6 = 15120$. *Другий спосіб*. Число всіх перестановок з 10 команд рівно $10! = 3628800$. У розподілі місць з четвертого по восьме і останніх двох не потрібно враховувати порядок розподілу їх між командами, отже, число всіх варіантів результату першості рівно $\frac{10!}{5!2!} = 15120$.

1.40. Скількома способами можна розставити дев'ять різних книг на полиці, щоб певні чотири книги стояли поруч?
***Розв'язок*:**
Потрібно виконати дві дії: розташувати блок, складений з чотирьох певних книг, і потім решта п'ять книг на полиці. Перша дія складається з двох операцій: розташувати книги всередині блоку і розташувати блок на полиці як неподільне ціле. першу операцію можна виконати $P_4 = 4! = 24$ способами, другу - 6 способами. Отже, за правилом множення перша дія можна виконати $24 \cdot 6 = 144$ способами, друге - можна виконати $P_5 = 5! = 120$ способами. За правилом множення отримаємо, що число всіх способів рівне $144 \cdot 120 = 17280$.

1.41. Скількома способами можна посадити за круглий стіл 6 чоловіків і 6 жінок так, щоб ніякі дві особи однієї статі не сиділи поруч?
Розв'язок-відповідь: $2(6!)^2 = 1036800$.

1.42. Скільки різних слів можна утворити з усіх букв слова «молоко »?
Розв'язок-відповідь: $\frac{6!}{3!} = 120$.

1.43. Скількома способами можна впорядкувати числову множину {1, 2, ..., 2n} так, щоб кожне непарне число мало парний номер?
Розв'язок-відповідь: $(n!)^2$.

З'єднання з повтореннями

До сих пір розглядалися з'єднання, в кожне з яких будь-який з n різних елементів даної множини входив не більше одного разу. Тепер будемо розглядати з'єднання з повтореннями, тобто з'єднання, в кожне з яких будь-який з n різних типів елементом може входити більше одного разу. Надалі будемо вважати, що вихідна безліч М містить n різних типів елементів. З'єднання з повтореннями з n елементів по m називається множина, складена з m елементів множини М. Очевидно, що число елементів кожного з n типів в такому поєднанні повинно бути не більше ніж m.

Сполучення з повтореннями

Нехай дано множину М, що складається з n типів елементів. З'єднання з повтореннями з елементів n типів по m без урахування їх порядку розташування, що відрізняються хоча б одним елементом, називаються поєднаннями з повтореннями з n елементів по m. Число всіх таких сполучень з повтореннями позначається $C_n^m(\text{п})$ *і дорівнює* $C_n^m(n) = C_{n+m-1}^m$.

1.44. Виписати всі поєднання з повтореннями з трьох елементів *a*, *b*, *c* по три. Знайти число всіх таких поєднань безпосередньо і за формулою.
Розв'язок-відповідь: (*a*, *a*, *a*), (*a*, *a*, *b*), (*a*, *a*, *c*), (*a*, *b*, *c*), (*a*, *b*, *b*), (*a*, *c*, *c*), (*b*, *c*, *c*), (*b*, *b*, *c*), (*b*, *b*, *b*), (*c*, *c*, *c*). $C_3^3(\text{п}) = C_5^3 = C_5^2 = 10$.

1.45. В кондитерській є п'ять різних сортів тістечок. скількома способами можна вибрати набір з 4 тістечок?
Розв'язок-відповідь: $C_5^4(\text{п}) = C_8^4 = 70$.

1.46. Скільки можна зробити кісток доміно, використовуючи числа 0, 1, 2, ..., *k*?
Розв'язок:
Набір цифр на кожній кістці доміно можна розглядати, як поєднання з повтореннями з *k +1* чисел по два. Таким чином, число всіх кісток доміно дорівнює числу всіх таких поєднань:

$C_{k+1}^2(\text{п}) = C_{k+2}^2 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

1.47. Скільки є наборів з п'яти чисел, що містять хоча б одну з цифр три або чотири?
Розв'язок-відповідь: $C_2^5(\text{п}) = C_6^5 = C_6^1 = 6$.

1.48. Безліч **A** складається з трьох елементів: *A = {a, b, c}*. Виписати склад множин Ω в чотирьох дослідах по вибору двох елементів з множини *A* з поверненням і без упорядкування. Порівняти результат за відповідною комбінаторної формулою.
Розв'язок-відповідь: Ω = {aa ,bb, cc, ab, ac, bc}, $C_3^2(\text{п}) = C_4^2 = 6$.

1.49. Скількома способами можна вибрати чотири літери з 15 букв: Б, Б, Б, Б, Л, Л, Л, Н, Н, Н, Н, Н, С, С, Р?
Розв'язок:
У даному випадку є 5 видів букв: Б, Л. Н, С, Р. За умовою завдання потрібно скласти вибірку з 4 букв. Відповідно, *n* = 5, *m* = 4 і число способів дорівнює числу сполучень з повтореннями з 5 по 4, тобто $C_5^4(\text{п}) = C_8^4 = 70$.

1.50. У поштовому відділенні продаються листівки 8 видів. Скільки існує різних варіантів покупок в ньому 10 листівок?
Розв'язок-відповідь: $C_8^{10}(\text{п}) = C_{17}^{10} = C_{17}^7 = 19448$.

1.51. Шість студентів складають іспит. Скільки існує різних варіантів отримати ними тільки позитивні екзаменаційні оцінки за п'ятибальною системою?
Розв'язок-відповідь: $C_3^6(\text{п}) = C_8^6 = C_8^2 = 28$.

1.52. Четверо дітей у родині. Скільки існує різних варіантів роздати дітям апельсин, яблуко і грушу?
Відповідь: $C_3^4(\text{п}) = C_6^4 = C_6^2 = 15$.

Розміщення з повтореннями

Нехай дано безліч М, що складається з n- типів елементів. Сполучення з повтореннями з n елементів по m, що відрізняються складом елементів і / або порядком їх розташування, називаються розміщеннями з повтореннями з n елементів по m. Число всіх таких розміщень з повтореннями позначається $A_n^m(\text{п})$ *та дорівнює:*

$$A_n^m(\text{п}) = n^m$$

1.53. Знайти число всіх розміщень з повтореннями з трьох елементів l,m, n по два.
Відповідь: $A_3^2(\text{п}) = 3^2 = 9.$

1.54. Скільки існує різних варіантів розмістити 6 пасажирів по 4 вагонах?
Відповідь: $A_4^6(\text{п}) = 4^6 = 4096.$

1.55. Скільки можна записати п'ятизначних чисел, використовуючи хоча б одну з 3 даних цифр?
Відповідь: $A_3^5(\text{п}) = 3^5 = 243.$

1.56. Скількома способами можна наклеїти 3 види марок на 6 конвертах без марок?
Відповідь: $3^6 = 729$.
1.57. Зенітна батарея з 4 знарядь стріляє по 6 цілям. Скільки варіантів вибору цілі при цьому може бути реалізовано?
Відповідь: $6^4 = 1296$.

Перестановки з повтореннями

Нехай дано безліч M, що складається з n типів елементів. Множина, що складається з m_1 *елементів першого типу,* m_2 *елементів другого типу і т.д. до* m_k *елементів к-го типу, причому з* $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k = n$*, називаються перестановками з повтореннями з n елементів. Число всіх таких перестановок позначається* $P_n(m_1, m_2, \ldots m_k)$ *і дорівнює*

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!}.$$

1.58. Скількома способами можна розділити m + n + s предметів на 3 групи так, щоб в одній групі було m предметів, в іншій – n предметів, у третій - s предметів?
Відповідь: $P_{m+n+s}(m, n, s) = \frac{(m+n+s)!}{m!n!s!}.$

1.59. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи літери слова «мама»? Написати всі ці слова.
Відповідь: $P_4(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$ (Мама, амма, амам, ммаа, маам, аамм).

1.60. Скількома способами можна розташувати в електричному ланцюзі при послідовному з'єднанні три червоні і п'ять жовтих лампочок?

Відповідь: $P_8(3{,}5) = \frac{8!}{3!5!} = 56.$

1.61. Скільки існує різних варіантів розподілу 8 фахівців за трьома підприємствам, яким потрібні відповідно один, два, чотири фахівці?
Відповідь: $8 \cdot P_7(1{,}2{,}4) = \frac{7!\cdot 8}{1!2!4!} = 840.$

1.62. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи літери слова "Математика"?
Відповідь: $P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200.$

1.63. Скільки шестибуквенних слів можна скласти з a, b і c, якщо відомо, що a зустрічається не більше трьох разів, b - не більше двох разів, c - не більше двох разів?
Відповідь: Можна виділити наступні варіанти шестибуквенних наборів (слів), складених відповідно з букв a, b і c: (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 2, 2).
Тоді $n = \frac{6!}{3!2!1!} + \frac{6!}{3!1!2!} + \frac{6!}{2!2!2!} = 300.$

1.2.3. Комбінаторний метод обчислення ймовірностей в класичній схемі

Існують дві принципово різні схеми вибору елементів з безлічі. У першій схемі вибір здійснюється без повернення елементів. Це означає, що відбирається або відразу необхідне число елементів, або послідовно по одному елементу, причому кожний відібраний елемент виключається з початкової множини. Під другою схемою вибір здійснюється поелементно з обов'язковим поверненням відібраного елемента на кожному кроці і ретельно перемішуванням вихідного безлічі перед наступним вибором. Після того як вибір тим чи іншим способом здійснений, відібрані елементи (або їх номери) можуть бути або впорядковані, або ні. В результаті виходять чотири різні постановки експерименту по вибору навмання m елементів із загального числа n різних елементів вихідного безлічі. Розглянемо кожну постановку експерименту в окремо.

Схема вибору, яка веде до сполучень

Якщо досвід полягає у виборі m елементів з n без повернення і подальшого упорядкування, то різними елементарними наслідками слід вважати поєднання з n елементів по m.

1.64. У партії з n виробів m бракованих. Знайти ймовірність того, що серед обраних навмання для перевірки l виробів рівно k виявляться бракованими.
Відповідь: $\frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}$.

1.65. Серед 17 студентів групи, з яких 8 дівчат, розігрується 7 лотерейних квитків. Знайти ймовірність того, що серед володарів
квитків виявляться 4 дівчини.
Відповідь: $\frac{C_8^4 \cdot C_9^3}{C_{17}^7} = \frac{785}{2431} = 0.302.$

1.66. З урни, в якій знаходяться 3 білих і 2 чорних кулі, перекладені дві кулі в іншу урну, яка містить 4 білих і 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що в другій урні виявилося білих і чорних куль порівну.
Відповідь: $\frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = 0.6.$

1.67. В урні 4 сірі, 6 рожевих і 5 синіх куль. Одночасно виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного (будь-якого) кольору.
Відповідь: $\frac{C_4^2 + C_6^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{31}{105} = 0.29.$

1.68. З партії, що містить 10 деталей, серед яких 3 браковані, навмання витягають 3 деталі для контролю. Знайти ймовірності наступних подій:
A - в отриманій вибірці один виріб бракований;
B - в отриманій вибірці немає жодного бракованого виробу;
C - в отриманій вибірці хоча б один виріб бракований.
Відповідь: Елементарним результатом є будь-який набір 3 деталей з 10. Тоді число всіх елементарних фіналів $C_{10}^3 = 120$. Неках m_A – число елементарних результатів, що сприяють події A. У цьому випадку в кожному наборі має бути одне браковане і два небракованних вироби. Бракований виріб можна вибрати трьома способами, два небраковані вироби з семи можна вибрати $C_7^2 = 21$ способами. По правилу множення $m_A = 3 \cdot 21 = 63$, тоді $P(A) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$. Нехай m_B – число елементарних результатів, що сприяють події B. У цьому випадку в кожному наборі всі вироби повинні бути небраковані. Три небраковані вироби з семи можна вибрати $C_7^3 = 35$ способами , тобто $m_B = 35$. Тоді $P(B) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$. Нехай m_C – число елементарних результатів, що сприяють події C. В цьому випадку в кожному наборі повинні бути або одне, або два, або три вироби браковані. У першому випадку число наборів дорівнює $m_A = 63$, у другому – $m_B = 21$, так як два браковані вироби можна вибрати $C_3^2 = C_3^1 = 3$ способами, а одне небраковане – 7 способами. В

третьму випадку $m_C = m_A + m_B + 1 = 3 + 21 + 1 = 85$, так як три браковані вироби можна вибрати одним способом. Отже, $P(C) = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$.

1.69. Серед кандидатів в студентську раду факультету 3 першокурсника, 5 другокурсників і 7 третьокурсників. Навмання вибирають 5 осіб на конференцію. Знайти ймовірності наступних подій:
A - будуть обрані одні третьокурсники;
B - всі першокурсники потраплять на конференцію;
C - не буде вибрано жодного другого курсу.
Відповідь: $P(A) = \frac{21}{3003} = \frac{1}{143}$.
$P(B) = \frac{66}{3003} = \frac{2}{91}$.$P(C) = \frac{252}{3003} = \frac{12}{143}$.

1.70. З колоди в 52 карти витягуються навмання 4 карти. Знайти ймовірності наступних подій:
A - в отриманій вибірці всі карти бубнової масті;
B - в отриманій вибірці виявиться хоча б один туз;
C - в отриманій вибірці всі карти однієї масті.
Відповідь: $P(A) = \frac{715}{270725} = 0.00264$. $P(B) = \frac{76145}{270725} = 0.2813$.
$P(C) = \frac{2860}{270725} = 0.01056$.

1.71. Студент знає відповіді на 20 питань з 25. Залік вважається зданим при правильній відповіді їм не менш ніж на 3 питання з 4 в квитку. Яка ймовірність того, що студент здасть залік, якщо, глянувши на перше питання квитка, він виявив, що його знає.
Відповідь:

$$P(A) = \frac{C_{19}^2 \cdot 5 + C_{19}^3}{C_{24}^3} = 0.9.$$

1.72. 10 футбольних команд, серед яких два призера і один аутсайдер за результатами попереднього чемпіонату, шляхом жеребкування розбиваються на дві підгрупи по 5 команд. Знайти ймовірності наступних подій:
A - команди-призери потраплять в різні групи;
B - обидва призера і аутсайдер потраплять в різні групи;
З - обидва призера і аутсайдер потраплять в одну групу.
Відповідь: $P(A) = \frac{2C_8^4}{C_{10}^5} = \frac{1}{18}, P(B) = \frac{C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{5}{36}, P(C) = \frac{C_7^2}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}$.

1.73. Серед 20 лотерейних квитків 15 виграшних. Знайти ймовірності наступних подій:

A - серед 10 проданих квитків 6 виграшних;
B - серед 12 проданих квитків всі виграшні;
C - серед 8 проданих квитків хоча б один невиграшний.
Відповідь: $P(A) = \frac{C_{15}^{6} \cdot C_{5}^{4}}{C_{20}^{10}} = 0.135,\ P(B) = \frac{C_{15}^{12}}{C_{20}^{12}} = 0.0036,$

$$P(C) = 1 - \frac{C_{15}^{8}}{C_{20}^{8}} = 0.949.$$

1.74. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання відібрані 10 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів 7 відмінників.
Відповідь: $\frac{C_8^7 C_4^3}{C_{12}^{10}} = \frac{16}{33}$.

1.75. В випуклому n-косинці випадковим чином вибирають дві вершини і з'єднують їх відрізком. Чому дорівнює ймовірність того, що побудований відрізок є діагоналлю n-кутника?
Відповідь: $\frac{C_n^2 - n}{C_n^2} = \frac{n-3}{n-1}$.

Схема вибору, яка веде до розміщень і / або перестановок

Якщо досвід полягає у виборі m елементів з n без повернення, але з упорядкуванням їх у міру вибору в послідовний ланцюжок, то різними елементарними наслідками даного досвіду будуть розміщення з n елементів по m, якщо m< n, або перестановки з n елементів, якщо m= n.

1.76. Є 10 карток з першими буквами українського алфавіту. Вибираються послідовно 4 картки і розкладаються в ряд в порядку надходження зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій:
A - складене слово закінчується буквою а;
B - вийде слово «дежа»;
C - слово починається з приголосної букви.
Відповідь: $P(A) = \frac{A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{1}{10}, P(B) = \frac{1}{A_{10}^4} = 0.0002, P(C) = \frac{6A_9^3}{A_{10}^4} = 0.6.$

1.77. 10 варіантів контрольної роботи роздаються випадковим чином 8 студентам, сидячим в ряд, по одному варіанту кожному. Знайти ймовірності подій:
A - варіанти 1 і 2 залишаться невикористаними;
B - варіанти 1 і 2 дістануться поруч сидячим студентам.
Відповідь: $P(A) = \frac{8!}{A_{10}^8} = \frac{1}{45}, P(B) = \frac{14 \cdot A_8^6}{A_{10}^8} = \frac{7}{45}.$

1.78. На кожній з п'яти карток написано по одній з букв: А, Д, К, Л, О. Після ретельного перемішування всі картки викладені послідовно в ряд у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що вийде слово «ЛОДКА».
Відповідь: $\frac{1}{120}$.

1.79. На полиці у випадковому порядку розставлені чотири томи. Знайти ймовірність того, що томи стоять в належному порядку справа наліво або зліва направо.
Відповідь: $\frac{2}{24}$.

1.80. Десять різних книг розставлені на полиці навмання. Знайти ймовірність того, що при цьому три певні книги виявляться поставленими разом.
Відповідь: $\frac{7!\cdot 8\cdot 3!}{10} = \frac{1}{15}$.

1.81. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій:
А - числа записані в порядку зростання;
В - числа 1 і 2 стоять поруч в порядку зростання;
С - числа 3, 6 і 9 розташовані в порядку зростання;
D - на парних місцях стоять парні числа;
E - сума чисел, рівновіддалених від кінців числа, дорівнює 10.
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{1}{9!}, \qquad P(B) = \frac{7!\,8}{9!} = \frac{1}{9}, \qquad P(D) = \frac{4!\,5!}{9} = \frac{1}{126}.$$

Пропонуємо самостійно провести детальний розбір цих завдань, для яких наведені короткі рішення. Розберемо рішення для подій С і *E*. Очевидно, що елементарними наслідками є перестановки з 9 чисел. Нехай m_C - число елементарних фіналів, що сприяють події *C*. Для будь-якого розташування чисел 3, 6 і 9 решта шість чисел можна розставити 6! способами. Для чисел 3, 6 і 9 число варіантів їх розташування дорівнює
$C_9^3 = 84$ і за правилом похідної $mc = 6!\,84$. Тоді

$$P(C) = \frac{6!\,84}{9!} = \frac{1}{6}$$

Нехай m_E - число елементарних рішень, що сприяють події *E*. В центрі записаного числа має перебувати число 5. На першому місці може опинитися будь-яке з восьми чисел, на другому - будь-яке з шести, які залишилися, на

третьому - будь-яке з чотирьох і на четвертому - будь-яке з двох. За правилом множення.
$m_E = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384.$
Тоді

$$P(E) = \frac{384}{9!} = \frac{1}{945}.$$

1.82. 8 водіїв займають місця для автомобілів навколо клумби у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що автомобілі двох певних водіїв будуть стояти поруч.
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7}$$

1.83. Маємо групу з 8 дітей. Ця група займає місця з одного боку прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що двоє певних дітей опиняться поруч за умови:
а) число місць 8 (подія A);
б) число місць 12 (подія B).
Розв'язок-відповідь:
а) $P(A) = \frac{2 \cdot 7 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}$; б) $P(B) = \frac{2 \cdot 11 \cdot A_{10}^{6}}{A_{12}^{8}} = \frac{1}{6}$.

1.84. Маємо 10 електриків, серед яких Григорій і Андрій, займають чергу за зарплатнею. Яка ймовірність того, що між Григорієм та Андрієм в черзі виявиться менше трьох осіб?
Рішення-відповідь:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8! + 2 \cdot 8 \cdot 8! + 2 \cdot 9 \cdot 8!}{10!} = \frac{8}{15}.$$

1.85. Маємо вісім карток. На них написано цифри від 1 до 8. Випробування полягає в випадковому виборі чотирьох карток і розкладанні їх у ряд в порядку надходження зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій:
A - з'явиться число 1 234;
B - з'явиться число, яке не містить цифри 2;
C - з'явиться число, що складається з чотирьох послідовних цифр;
D - з'явиться непарне число;
E - з'явиться число, що містить хоча б одну з цифр 4 або 5.
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{1}{A_8^4} = \frac{1}{1680}, \qquad P(B) = \frac{A_7^4}{A_8^4} = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{5}{A_8^4} = \frac{1}{336},$$

$$P(D) = \frac{4 \cdot A_7^3}{A_8^4} = \frac{1}{2}, \qquad P(E) = 1 - \frac{A_6^4}{A_8^4} = \frac{11}{14}.$$

1.86. Є 12 хворих, серед яких Олег і Дмитро, випадковим чином займають чергу на прийом до лікаря. Знайти ймовірності наступних подій:
A - Олег буде третім, а Дмитро - шостим;
B - в створеній черзі між Олегом і Димтром буде п'ять чоловік;
C - Олег і Дмитро стоять поруч;
D - Олег попереду Дмитра на чотири людини.
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{10!}{12!} = \frac{1}{132}, \qquad P(B) = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10!}{12!} = \frac{1}{11};$$

$$P(C) = \frac{28 \cdot 10!}{12!} = \frac{7}{33}, \qquad P(D) = \frac{7 \cdot 10!}{12!} = \frac{7}{132}.$$

1.87. 5 хлопців і 5 дівчат розміщено випадковим чином в ряд на 10 місць. Знайти ймовірності наступних подій:
A - будь-які дві дівчини не сидять поруч;
B - всі хлопці сидять поруч;
C - всіх хлопців розсадили між двома групами дівчат по три особи кожна.
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{2 \cdot (5!)^2}{10!} = \frac{1}{378}, \qquad P(B) = \frac{5 \cdot (5!)^2}{10!} = \frac{5}{756}, \qquad P(C) = \frac{(5!)^2}{10!} = \frac{1}{756}.$$

1.88. В заліковий тиждень студенти здають 5 заліків, в тому числі 2 заліки з різних галузей телекомунікаційних систем і мереж. Яка ймовірність того, що в узгодженому розкладі заліки з телекомунікаційних систем і мереж починають і закінчують заліковий тиждень?
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 3!}{5!} = 0{,}1.$$

1.89. Маємо колоду з 36 гральних карт. Колода ретельно тасується, після чого береться одна за одною всі карти, розпочинаючи з верхньої. Яка імовірність того, що першим тузом виявиться п'ята карта?
Розв'язок-відповідь:

$$n = 36!, \qquad m = A_{32}^4 C_4^1 P_{31}, \qquad P(A) = 0{,}076.$$

Схема вибору, яка веде до сполученням з повтореннями

Якщо дослідження полягає у виборі m елементів з n з поверненням, але без подальшого впорядкування, то різними елементарними наслідками такого досвіду будуть поєднання з повтореннями. Нагадаємо, що

$$C_n^m(\text{п}) = C_{n+m-1}^m.$$

1.90. В інституті є кафедри по 16 напрямкам . У цей інститут вступили 4 групи першокурсників. Вважаючи, що будь-який розподіл першокурсників рівноможливий,
знайти ймовірності наступних подій:
A - групи будуть навчатися на різних кафедрах;
B - групи будуть навчатися на одній кафедрі.
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{C_{16}^4}{C_{16}^4(\text{п})} = \frac{C_{16}^4}{C_{19}^4} = \frac{455}{969} \approx 0{,}47;$$

$$P(B) = \frac{C_{16}^1}{C_{19}^4} = \frac{1}{5814} \approx 0{,}00017.$$

1.91. В магазині електроніки є 7 видів резисторів. Один покупець купив 4 резистора. Яка ймовірність того, що покупцеві треба:
а) резистори одного виду (подія *A*);
б) резистори різних видів (подія *B*);
в) по два резистори різних видів (подія C).
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{C_{17}^1}{C_7^4(\text{п})} = \frac{C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{30}, \qquad P(B) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{6}, \qquad P(C) = \frac{C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{1}{10}.$$

1.92. Із загальної кількості гральних фішок, що містять числа 0, 1, 2, ..., *n*, навмання витягли одну фішку. Виявилося, що це не дубль. Знайти ймовірність p_n того, що другу витягнуту також наосліп кістка доміно можна буде прикласти до першої. Яке числове значення імовірності для $n = 6$ (звичайний набір доміно) та $n = 9$ (розширений набір) .
Розв'язок. Всіх кісток доміно C_{n+2}^2 штук. У випадковому виборі приймають участь C_{n+2}^2 - 1 кісток, що відповідає числу всіх елементарних результатів. До витягнутої кістки можна приставити n кісток з однієї сторони і n кісток - з

іншої. Тоді число сприятливих результатів для кінцевої події А дорівнює 2n та
$P(A) = \frac{2n}{C_{n+2}^{2} - 1}$
При *n=6*

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

при *n=9*

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

1.93. Щоб покрасити 10 заборів були використані червона, зелена і коричнева фарба. Знайти ймовірність того, що 4 забори було покрашено в коричневому кольорі .
Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{C_{2}^{6}(\text{п})}{C_{3}^{10}(\text{п})} = \frac{C_{7}^{6}}{C_{12}^{10}} = \frac{7}{66}.$$

Схема вибору, що приводить до розміщення з повтореннями

Якщо вибір m елементів з безлічі n елементів створюється з поверненням і з упорядкуванням їх у послідовний ланцюжок, то різними елементарними наслідками будуть розміщення з повторами. Нагадаємо, що $A_n^m(\text{п}) = n^m$.

1.94. 7 кульок з побажаннями випадковим чином розсипаються по 4 стаканам (в один стакан може поміститися будь-яке число кульок). Знайти імовірність того, що *A* - перший стакан виявиться порожнім; *B* - один стакан виявиться пустим.
Розв'язок:
Будемо вважати, що дослідження складається в 7-кратному виборі з поверненням номера стакану або запису 7-літерного слова із використанням тільки 4 букв. Занумеруємо стакани. Подія *A* відповідає вибору, коли символ 1 видалений з алфавіту, тобто враховуються тільки три стакани, тому

$$P(A) = \frac{3^7}{4^7} = 0{,}134;\ P(B) = 4 \cdot P(A) = 0{,}533.$$

1.95. Дано телефонну книгу. Розкриваємо її навмання і випадково обираємо номер телефону. Відомо, що телефонні номери складаються з 7 цифр. Яка імовірність наступних подій: *A* - чотири останні цифри однакові; *B* - все цифри різні; C - номер починається з цифри 5; D - номер містить три цифри 5, дві цифри 1 і дві цифри 2.

Розв'язок.

Число всіх елементарних фіналів (телефонних 7-знакових номерів) дорівнює 10^7. Нехай m_A - число елементарних результатів, задовольняючих події A. Для перших трьох цифр число варіантів дорівнює 10^3, для решти чотирьох - 10, отже, за правилом множення

$$m_A = 10^3 \cdot 10 = 10^4.$$

Тоді $P(A) = \frac{10^3}{10^7}$. Нехай m_B - кількість елементарних результатів, що сприяють події B. Оскільки для події B усі цифри різні, то число сприятливих результатів рівне числу розміщень з 10 по 7. Тоді

$$P(B) = \frac{A_{10}^7}{10^7} = 0{,}3628.$$

Для події C число елементарних фіналів дорівнює 10^6 та

$$P(C) = \frac{10^6}{10^7} = 0{,}1.$$

Для розрахунку елементарних результатів події D потрібно застосувати формули числа сполучень і правило множення:

$$m_D = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 210.$$

Тоді

$$P(D) = \frac{210}{10^7} = 0{,}000021.$$

1.96. Шестеро людей увійшли в вагон на першій зупинці гілки метро з 7 станціями. Знайти ймовірності подій: A - на другій, третій і четвертій зупинці не вийшов жоден з пасажирів B - три пасажири вийшли на сьомій зупинці; C - на кожній зупинці вийшов один пасажир; D - всі пасажири вийшли на одній станції.

Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{3^6}{6^6} = \frac{1}{64} = 0{,}015625, \qquad P(B) = \frac{C_6^3 \cdot 5^3}{6^6} = 0{,}0536,$$

$$P(C) = \frac{6!}{6^6} = 0{,}0154, \qquad P(D) = \frac{6}{6^6} = 0{,}0003.$$

1.97. Знайти імовірність того, що в компанії з 12 друзів хоча б у двох виявиться однаковий день народження?

Розв'язок.

Число всіх елементарних результатів дорівнює 365^{12}. Число випадків, що сприяють кінцевій події А, дорівнює числу всіх результатів без числа випадків, коли у всіх 12 друзів дні народження різні, тобто 365^{12} - A_{365}^{12}. Тоді

$$P(A) = \frac{365^{12} - A_{365}^{12}}{365^{12}} = 0{,}167.$$

1.98.Відомо, що реєстр калькулятора має 10 розрядів. , Так як появлення будь-якої цифри в кожному розряді рівноможливо, знайти імовірність наступних подій: A - у всіх розрядах стоять одиниці; B - у всіх розрядах стоять різні цифри; C - регістр містить рівно три однакові цифри; D - регістр містить рівно дві пари однакових цифр.

Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{1}{10^{10}}, \qquad P(B) = \frac{10!}{10^{10}} = 0{,}00036, \qquad P(C) = \frac{10 \cdot C_{10}^{3} \cdot A_{9}^{7}}{10^{8}} = 0{,}022,$$

$$P(D) = \frac{2 \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{2} \cdot A_{8}^{6}}{10^{10}} = 0{,}0051.$$

1.99. Кидають 4 однакові гральні кубик. Яка імовірність наступних подій: A - ні на одному кубику не випаде 6 очок; B - хоча б на одному кубику випаде 6 очок; C - на 2 кубиках випаде по 6 очок.

Розв'язок-відповідь :

$$P(A) = \frac{1}{10^{10}}, \qquad P(B) = \frac{10!}{10^{10}} = 0{,}00036,$$

$$P(C) = \frac{10 \cdot C_{10}^{3} \cdot A_{9}^{7}}{10^{8}} = 0{,}022, \qquad P(D) = \frac{2 \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{2} \cdot A_{9}^{7}}{10^{10}} = 0{,}0051$$

1.100. Маємо телефонну книгу і випадково вибираємо семизначний номер телефону. Вважаючи, що всі комбінації цифр рівноможливі, знайти ймовірності наступних подій: A - чотири останні цифри телефонного номера однакові; B - номер починається з цифри 5; C - номер містить три цифри 5, дві цифри 1 і дві цифри 2.

Розв'язок-відповідь:

$$P(A) = \frac{1}{10^{3}}, \qquad P(B) = \frac{1}{10}, \qquad P(C) = \frac{C_{7}^{3} \cdot C_{4}^{2}}{10^{7}} = 0{,}000021.$$

1.101. В m кімнат готелю випадковим чином заселяють n туристів ($m > n$). Яка імовірність того, що в певних n кімнатах буде по одному туристу.

Розв'язок-відповідь: $\frac{m!}{n^m}$.

Схеми вибору, приводить до перестановок з повторами

Нехай n різних предметів випадковим чином розподіляються по k занумерованих скриньках так, що i-й за рахунком ящик містить m_i *предметів* $\left(i = \underline{1, k}\right)$, *причому* $m1 + m2 + \ldots + mk = n$, *тоді число всіх елементарних результатів даного досвіду дорівнює числу перестановок з повторенням із n елементів. Нагадаємо, що*

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2!\, \ldots m_k!}$$

1.102. Маємо 6 гральних кісток. Кинемо їх. Яка імовірність наступних подій: *A* - випали 3 одиниці, 2 трійки і 1 шістка; *B* - випали різні цифри; *C* - випали три однакові цифри.

Розв'язок. В якості елементарного результату будемо вважати упорядкований набір з шести цифр. Тоді $n = 6^6$.

Для події *A:*

$$m_A = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60, \qquad P(A) = 0{,}0013.$$

Для події *B:*

$$m_B = 6! = 720, \qquad P(B) = 0{,}0154.$$

Для події *C:*

$$m_c = \left(\frac{6! \cdot 5}{3!\,3!} + \frac{6! \cdot A_5^2}{3!\,2!\,1!} + \frac{6! \cdot C_5^3}{3!\,1!\,1!\,1!}\right) \cdot 6 = 15000, P(C) = 0{,}3215.$$

1.103. Є 7 огірків, 3 картоплини і 5 морквин. Їх випадково розклали в три пакета по однаковій кількості овочів в кожному. Яка імовірність того, що в кожному пакеті виявилося по одній картоплині.

Розв'язок. Якщо пронумерувати пакети і в якості елементарного результату взяти набір з 15 овочів, розподілених по трьох ящиках, то

$$n = \frac{15!}{(5!)^3}, \qquad m = \frac{12!}{(4!)^3}, \qquad P(A) = \frac{25}{546}$$

1.104. У Динамо Київ з 11 осіб випадковим чином формується команда в наступному складі: 1 голкіпера, 3 центральних, 4 захисника і 3 форварда. Яка ймовірність того, що з двох певних гравців один буде грати форвардом, а інший - захисником?

Розв'язок-відповідь: $n = \frac{11!}{1!3!4!3!}$, $m = \frac{2 \cdot 9!}{1!3!3!2!}$, $P(A) = \frac{12}{55}$.

1.105. В автосалоні стоять 5 червоних, 7 синіх та 10 чорних автомобілів. Випадковим чином трьом співробітникам вибирають авто. Знайти вірогідність того, що для кожного співробітника знайдеться по одному синьому авто.

1.106. 5 відвідувачів кафе серед яких Петро і Сергій, розміщуються в залі де розташовано два двомісних та один одномісний столики. Знайти ймовірності наступних подій:

А – Петро і Сергій сядуть за двомісні столики;

В – Петро сяде за двомісний, а Сергій за одномісний.

1.107. 24 фігури серед яких порівну розділено коло, квадрат, та трикутник роздали 3 дітям по 7 кожному.Знайти ймовірність таких подій:

А – кожна дитина отримала коло;

В – одна дитина отримала всі 7 трикутників;

С – усі квадрати потрапили до однієї дитини.

1.108. Петро і Сергій збирають команду для гри у хокей, їм потрібно 6 гравців яка складається з 3 нападаючих, 2 захисників і 1 воротаря. Знайти ймовірність наступних подій:
А – Петро і Сергій грають як захисники; В – Петро грає як нападаючий, а Сергій як воротар; С – Петро і Сергій грають як нападаючі.

1.3. Геометрична ймовірність

Класична формула ймовірності передбачає кінцеве число елементарних результатів. Однак часто зустрічаються експерименти, що складаються з нескінченного числа елементарних фіналів. Для подолання цієї перешкоди використовується поняття геометричної ймовірності.

Нехай на площині є фігура Ω, яка містить фігуру ω. На фігуру Ω навмання кидається точка. Позначимо через А подію, що полягає в попаданні кинутої точки в фігуру ω, через S (ω) і S (Ω) - площі фігур ω і Ω відповідно. Фігуру, яка сприяла настанню події А, будемо називати ω. Тоді під ймовірністю події А будемо розуміти відношення даних площ:

$$P(A) = \frac{S(\omega)}{S(\Omega)}$$

У наведеному вище прикладі розглядалися двовимірні області. Окреслені площі S(ω) і S(Ω) називаються мірами цих областей на площині. Одновимірною областю вважається дуга кривої або відрізок прямої. Мірою одновимірної області є її довжина. Мірою тривимірної (просторової) області є її об`єм. Позначимо m(ω) міру області ω. Виходячи з вище сказаного, можна сформулювати наступне визначення: геометричною ймовірністю події А називається відношення m(ω) - міри області, яка сприяла появі події А, до m(Ω) - міри всієї області.

1.109. Перед окопами вздовж прямої лінії через кожні 10 м встановлені протитанкові міни. Перпендикулярно цій лінії рухається танк, ширина якого 3м. Яка ймовірність того, що танк перетне лінію установки хв неушкодженим?

Розв'язок. Нехай А - подія, яка полягає в тому, що танк перетне лінію, де встановлені міни, неушкодженим. Областю Ω є відрізок, довжина якого дорівнює 10 м, тобто $m\ (\Omega)$ = 10, областю ω, сприятливою до появи події А, - відрізок довжиною 7 м, тобто $m\ (\omega)$ = 7.

Відповідь: P(A) = 0,7.

1.110. На перехресті встановлено світлофор, де хвилину горить зелене світло і півхвилини - червоне. У випадковий момент часу до перехрестя під'їжджає автомобіль. Яка ймовірність того, що він проїде перехрестя без зупинки?

Розв'язок. Нехай А - подія, яка полягає в тому, що автомобіль проїде перехрестя без зупинки. Областю Ω є тимчасовий відрізок, що дорівнює 1.5

хвилини, областю ω, яка сприяла появі події A, - часовий відрізок, рівний 1 хвилині. Отже, m (Ω) = 1,5, m (ω) = 1.

Відповідь: P (A) = 2/3.

1.111. На городі ширина якого 30м посаджена картопля через кожні пів метра. Картоплю викопують мотоблоком ширина якого 10см. Яка ймовірність того, що мотоблок пропустить картоплю?

1.112. По річці пливе пароплав через розвідний міст який 60 секунд в опущеному стані, а 20 в розведеному. Знайти ймовірність того, що пароплав перетине міст в випадковий момент часу?

1.113. На деяку площину нанесено сітку із квадрату зі стороною 5. Знайти ймовірність того, що коло радіусом 1,5см не пересіче ні однієї сторони квадрату.

1.114. Знайти ймовірність того, що сума двох випадкових додатних чисел a та b (a≤3, b≤3) не буде більше 3, а їх добуток не більше 4/6.

1.115. Три агрегати обслуговуються працівником в середньому 15 хвилин із 2 годин. Агрегати можуть вийти із ладу в будь-який час незалежно один від одного. Знайти ймовірність того що за дві години один із агрегатів потребує уваги робочого в той момент часу, коли він зайнятий обслуговуванням іншого. Вказівка $|x - y| \leq 15$

1.116. Знайти ймовірність, що точка потрапить у вписаний в коло квадрат.

1.117. Стрижень довжини l розділено на 3 частини невідомої величини. Знайти ймовірність того, що із частин стрижня можна скласти трикутник.

Вказівка: $x, y, l - y - x$ – сторони трикутника ;

$$\{x + y > l - y - x, |y - x| < l - y - x.$$

1.118. В будь-які моменти часу проміжку T рівно ймовірні прийоми двох сигналів. Прийом не відбувається якщо різниця між моментами їх прийому буде менше τ . Знайти ймовірність того, прийому сигналу не відбудеться.

1.119. Приймач періодично зі сталою швидкістю (Гц/С), проходить деякий діапазон частот f_1, f_2, де можлива поява сигналу, за яким спостерігають. Смуга пропуску приймача визначається допустимої росстройкою відносно сигналу сигналу. Вважаючи що сигнал імпульсний і поява його рівно ймовірна в будь-який момент та в будь-якій точці інтервалу $(f_1 - \Delta f \;\; , f_2 - \Delta f \;\;)$, знайти ймовірність виявлення цього сигналу.

1.120. Знайти ймовірність пеленга (зарубки) передавача в умовах попередньої задачі, якщо антена пеленгатора рівномірно обертається і кут розчину діаграми спрямованості антени $\beta = 18°$ та відома частота сигналу.

1.121. Знайти ймовірність виявлення сигналу в умовах завдання 1.119 *, якщо сигнал не є імпульсним, а має кінцеву тривалість τс (вважаючи, що реєстрація сигналу приймачем відбувається миттєво).

1.122. Петро та Сергій домовилися про зустріч в певному місці між 9 і 11 годинами. Кожен приходить і чекає іншого до закінчення години, але не більше 15 хвилин. Знайти ймовірності наступних подій:

A - зустріч відбулася; B - зустріч не відбулася;

C - Іванові не довелося чекати Петра;

D - зустріч відбулася після 10 год. 30 хв; E - Іван запізнився на зустріч;

F - зустріч відбулася, коли до закінчення години залишалося менше 5 хвилин.

Вказівка: скористатися рішенням завдання 1.11.

2. СКЛАДНІ ПОДІЇ

2.1. Операції над подіями

1. Сумою двох подій A і B називають подію C, що позначається C =A + B та складається з елементарних результатів, та належать до хоча б одної з двох подій: $C = \{\omega i \;\in \Omega: \omega i \;\in\; A \text{ або/та } \omega i \;\in B\}$.

Властивості:

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

$$A + A = A,\ A + \emptyset = A,\ A + \Omega = \Omega,\ A + \underline{A} = \Omega,\ \Omega + \emptyset = \Omega.$$

2. Добутком двох подій A і B називають подію C, що позначається C= AB, що складається з елементарних результатів, що включає в себе дві події одночасно: $C = \{\omega i \in \Omega : \omega i \in A$ та $\omega i \in B\}$.

Властивості:

1) $AB = BA$;

2) $A(BC) = (AB)C$;

3) $A(B + C) = AB + AC$.

$$AA = A, \quad A\emptyset = \emptyset, \quad A\Omega = A, \quad A\underline{A} = \emptyset, \quad \Omega\emptyset = \emptyset.$$

Правила де Моргана:

1) $\underline{A + B} = \underline{AB}$;

2) $\underline{AB} = \underline{A} + \underline{B}$.

Події A и B називають несумісними, якщо AB = $\emptyset$.

2.1 Чи утворюють повну групу події, зазначені в наступних дослідах?

1. Монета підкинута один раз; A - поява герба, B – поява цифри.

2. Пара монет підкинута один раз; A - поява двох гербів, B - поява двох цифр. *Відповідь:* ні.

3. Зроблено два постріли по мішені: A - жодного попадання, B - одне влучення, C - два попадання. *Відповідь:* так.

2.2 Кинуті дві гральні кістки. Нехай подія A полягає в тому, що сума очок, що випали на обох кістках, непарна, подія B - хоча б на одній з кісток випала одиниця. Описати події AB, A+B, $\underline{AB}$.

Відповідь:

AB - на одній з кісток випало парне число, на інший - 1;

A + B - сума очок, що випали на обох кістках, непарна або на одній з кісток випала одиниця;

A$\underline{B}$ - сума очок, що випали на обох кістках, непарна, що не

менше 5.

2.3 Навмання обрана подружня пара. Нехай подія А - чоловікові більше

30 років, В - чоловік старший за дружину, С - дружині більше 30 років.

1. З'ясувати сенс наступних подій: АВС, А-АВ,А$\underline{В}$С.

2. Показати, що $\underline{AC}$⊂В.

2.4 Нехай А, В, С - довільні події. Знайти вираження подій, що складаються в тому, що з трьох подій А, В, С відбулися події: а) тільки А; б) тільки А і В; в) всі три; г) принаймні, одна; д) хоча б дві; е) один будь-який; ж) два будь-яких; з) не більше двох; і) жодного.

Відповідь: а)$A\underline{BC}$, б)$AB\underline{C}$, в)ABC , г)$A + B + C$, д)$AB + BC + AC$,

е) $A\underline{BC} + \underline{A}B\underline{C} + \underline{AB}C$, ж)$AB\underline{C} + A\underline{B}C + \underline{A}BC$,
з)$(A + B + C) - ABC$,

і) $\underline{ABC}$.

2.5 Нехай А, В, С - довільні події. Довести рівності:

а)$A\bar{\bar{B}} = A + B$; б)$\underline{\underline{A} + \underline{B}} = AB$; в)$\underline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \underline{A_1} * \underline{A_2} * \ldots * \underline{A_n}$; г)$\underline{A_1 * A_2 * \ldots * A_n} = \underline{A_1} + \underline{A_2} + \cdots + \underline{A_n}$.

2.6 Проводиться спостереження за трьома однаковими об'єктами, котрі за час спостереження можуть бути виявлені чи ні.
Розглядаються наступні події:
А - виявлений один з об'єктів;
В - виявлено хоча б один об'єкт;
С - виявлено не менше двох об'єктів;
D - виявлено два об'єкти;
Е - виявлено три об'єкти;
Вказати, яким подіям рівні наступні: А + В, АВ, В + С, ВС, D + Е.

Відповідь: $A + B = B$, $AB = A$, $B + C =$ В, $BC = B$, $D + E = C$.

2.7 Досвід полягає в киданні двох монет. Розглядаються події:
А - поява герба на першій монеті;
В - поява цифри на першій монеті;
З - поява герба на другий монеті;
D - поява цифри на другий монеті;
Е - поява хоча б одного герба;
F - поява хоча б однієї цифри;

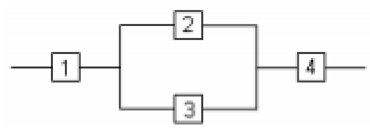
G - поява одного герба і однієї цифри;
H - не появу жодного герба;
K - поява двох гербів.
Яким подіям рівні наступні: 1) A + C; 2) AC; 3) EF; 4) G +E; 5) GE; 6) BD=H; 7) E+K=E.
Відповідь: $A + C = E$, $AC = K$, $EF = G$,
$G + E = G$, $GE = G$, $BD = H$, $E + K = E$.

2.8 Нехай $A_1A_2A_3$- події, які спостерігаються в даному експерименті. Висловити через них такі події:
A - з трьох подій відбудеться одне;
B - з трьох подій відбудуться два;
C - з трьох подій відбудеться хоча б одне;
D - з трьох подій відбудеться не менше двох;
E - з трьох подій не відбудеться жодного;
F - з трьох подій відбудуться хоча б два;
G - з трьох подій не відбудеться хоча б одне.
Відповідь: $A = A_1\underline{A_2A_3} + \underline{A_1}A_2\underline{A_3} + \underline{A_1A_2}A_3$;

$B = A_1A_2\underline{A_3} + A_1\underline{A_2}A_3 + \underline{A_1}A_2A_3$; $C = A_1 + A_2 + A_3$;

$D = B + A_1A_2A_3$; $E = \underline{A_1A_2A_3}$; $G = \underline{A_1} + \underline{A_2} + \underline{A_3}$.

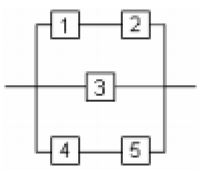
2.9 Електричне коло складена за схемою:



Події A_k- вийшов з ладу k-й елемент. Подія A - розрив ланцюга.

Висловити подію A через події A_k.

2.10 Електричне коло складена за схемою:



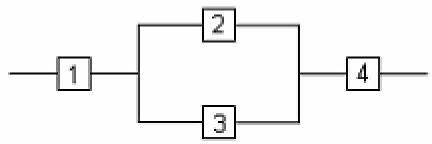
Події A_k- вийшов з ладу k-й елемент. Подія A - розрив ланцюга.

Висловити подію A через події A_k.

Відповідь: $A = (A_1 + A_2)A_3(A_4 + A_5)$.

2.8. Нехай A_1, A_2, A_3- події, що спостерігаються в цьому експерименті. Виразити через них такі події:
A- з трьох подій відбудеться одна;
B- з трьох подій відбудуться дві;
C- з трьох подій відбудеться хоча б одна;
D- з трьох подій відбудеться щонайменше дві;
E - з трьох подій не відбудеться жодного;
F - з трьох подій відбудуться хоча б дві;
G- з трьох подій не відбудеться хоча б одна.

2.9. За схемою складено електричне функціональне коло:

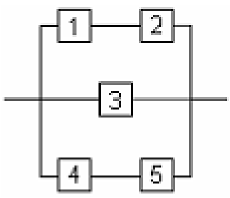


Події A_k - k-й елемент вийшов з ладу. Подія A - розрив кола.

Виразити подію A через події A_k.

Відповідь: $A = A_1 + A_2 A_3 + A_4$.

2.10. За схемою складено електричне функціональне коло:



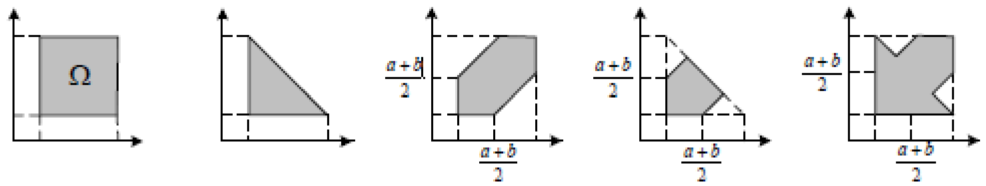
Події A_k - k-й елемент вийшов з ладу. Подія A - розрив кола.

Виразити подію A через події A_k.

Відповідь: $A = (A_1 + A_2) A_3 (A_4 + A_5)$.

2.11. На відрізку *[a , b]* навмання позначаються дві точки x і y. На координатній площині O_{xy} зобразити області точок *(x, y)*, відповідним подіям $\mathbf{\Omega}$, *A, B, AB, A + B,* де A - подія, яка полягає в тому, що y розташований ближче до точки a, ніж x до точки b; B - подія, яка полягає в тому, що відстань між точками x і y менше половини довжини відрізка *[a , b]* .

Відповідь: мал. 13-17



2.2. Теорема складання ймовірностей

Теорема. *Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи, тобто:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доведення. *Нехай простір Ω складається з n-елементарних результатів деякого експерименту, подія A – з k елементарних результатів, подія B – з l елементарних результатів, подія AB – з m елементарних результатів. Тоді:*

$$P(A+B) = \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Якщо події A та B несумісні, то $P(AB) = 0$ *та* $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Наслідок. $P(A) = 1 - P(\underline{A})$.

2.12. У ящику 30 кульок,: 10 зелених, 5 жовтих, 15 білих. Знайти ймовірність того, що навмання взята куля кольорова.

Відповідь: 0,5

2.13. З групи художників, яка складається з 4 чоловіків і 6 жінок, вибираються навмання 3 людей. Яка вірогідність того, що серед них буде хоча б один чоловік? Вирішити двома способами.

Відповідь: 5/6 .

2.14. Підкидають три гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума

очок на трьох кубиках стане менше за 17.

Відповідь: 53/54 .

2.15. Серед 11 іграшок 3 браковані. Яка вірогідність того, що серед трьох відібраних іграшок опиниться хоча б одна бракована.

Відповідь: 109/165 .

2.16. АРК перевіряє 25 виробів на стандартність за двома критеріями. Відомо, що перший критерій не витриманий у 8 виробах, другий - у 6 виробах, обидва критерії - у 3 виробах. Яка вірогідність того, що навмання обраний виріб не задовольняє стандарту.

Відповідь: 11/25 .

2.3. Умовна ймовірність.

Теорема множення імовірностей

Теорема. *Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої, тобто:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Доведення. Нехай простір Ω складається з n елементарних результатів деякого експерименту, подія A - з k елементарних результатів, подія B – з l елементарних результатів, подія AB – з m елементарних результатів. Тоді:

$$P(A) = \frac{m}{n}, P(AB) = \frac{l}{n}, P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{l}{m} \rightarrow P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m} = \frac{l}{n} = P(AB).$$

Аналогічно доводять другу рівність.

Дві події A і B називають незалежними, якщо P(AB)=P(A) або P(B/A)=P(B).

В цьому випадку P(AB)=P(A)P(B).

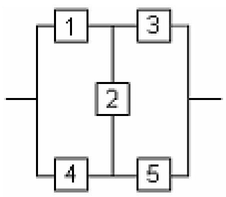
2.17. 7 папірців з номерами від 1 до 7 знаходяться в ящику. З нього послідовно вибирають два папірці без повернення. Знайти *P (B / A)* за умови:

A- вийнятий папірець має №3;

B- вийнятий папірець має непарний номер.

Відповідь: Нехай подія А трапилась. Можливих варіантів залишається 6, сприятливих події В - 3, тоді Р (В / А) = 1/2.

2.18. Електричне функціональне коло складається з п'яти елементів:



Нехай A_i- i-й елемент проводить струм. A - коло проводить струм. Знайти $P(A_1/A)$, $P(A/A_2)$.

Відповідь: $P\left(\frac{A_1}{A}\right) = \frac{11}{16}$, $P\left(\frac{A_2}{A}\right) = \frac{9}{16}$.

2.19. З колоди в 36 карт випадково виймається одна карта. Розглядаються події:

A - з'явився король;

B- з'явилася карта чорної масті;

C - з'явився бубновий король;

D- з'явилася дев'ятка.

Залежні або незалежні наступні пари подій: а) A і B; б) A і C; в) B і C; г) B і D?

Відповідь:

Події А і В незалежні, так як Р (А) = 4/36 = 1/9 і Р (А / В) = 2/18 = 1/13.

Події А і С залежні, так як Р (А) = 1/9; Р (А / С) = 1.

Події В і С залежні, так як Р (В) = 18/36 = 1/2; Р (В / С) = 1.

Події В і D незалежні, так як Р (В) = 1/2; Р (В / D) = 2/4 = 1/2.

2.20. Дослід полягає в послідовному підкиданні двох монет по одному разу. Розглядаються події:

А- випадання цифри на першій монеті;

В- випадання хоча б однієї цифри;

С- випадання хоча б однієї герба;

D - випадання цифри на другий монеті.

Визначити, залежні або незалежні пари подій: а) А і С;

б) А і D; в) В і С; г) В і Д.

Відповідь: а) P(A) = 1/2, P(A/C) = 1/3 – залежні; б) P(A) = 1/2, P(A/D) = 1/2 – незалежні; в) P(B)= 3/4, P(B/C) = 2/3 – залежні, P(B) = 3/4, P(B/D) = 1 – залежні.

2.21. У коробці 9 ламп, з яких три булы вживані. Протягом дня майстру для ремонту приміщення довелося взяти дві лампы. Знайти ймовірність того, що обидві лампи були у вжитку.

Відповідь: $P(AB) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{3}{9} * \frac{2}{8} = \frac{1}{12}$

2.22. В урні 3 синіх, 2 зелених і 6 білих куль. Яка ймовірність того,

що будуть вилучені дві кольорові кулі (з поверненням і без повернення).

Відповідь: $a)\ P(A) = (5/11)^2 \approx 0{,}21;$ б) $P(A) = 5/11 * 4/10 = 2/11 \approx 0{,}18.$

2.4. Ймовірності складних подій

2.23. Два лучника стріляють по мішені незалежно один від одного. Ймовірність влучення в мішень першого лучника дорівнює 0,7, другого - 0,8. Яка ймовірність того, що мішень буде вражена. Завдання вирішити трьома способами.

Відповідь: 0,94; способи: а) $A = A_1 + A_2;$

$$б)A = A_1\underline{A_2} + \underline{A_1}A_2 + A_1A_2; \qquad в)\ P(A) = 1 - P\left(\underline{A_1A_2}\right).$$

2.24. У трьох залах театру йдуть три вистави. Імовірність того, що на певний час в касі першого залу є квитки, дорівнює 0,3, в касі другого залу - 0,2, в касі третього залу - 0,4. Яка ймовірність того, що на даний час можна купити квиток на будь-яку виставу.

Відповідь: 0,664.

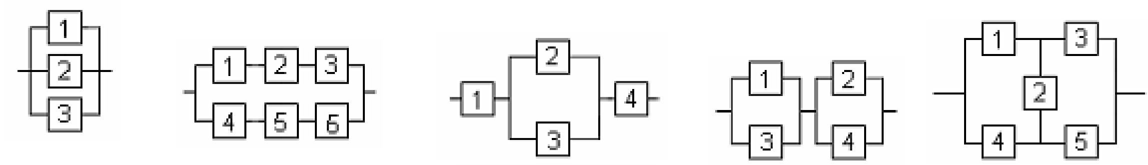
2.25. Перша компанія може продати партію товару з ймовірністю 0,9, друга - 0,8, третя - 0,7. Яка ймовірність того, що партію товару продадуть:

а) не менше двох компаній; *Відповідь:* 0,902.

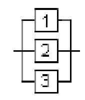
б) не більше однієї компанії; *Відповідь:* 0,098.

в) хоча б одна компанія. *Відповідь: 0,994.*

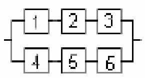
2.26. Обчислити надійність кожної з п'яти схем, якщо p_i надійність i-го елемента.



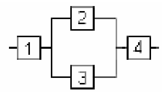
Відповідь з правої сторони від схем:



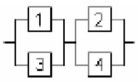
$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=$$
$$=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3).$$



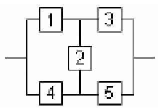
$$P(A)=P(A_1A_2A_3+A_4A_5A_6)=$$
$$=p_1p_2p_3+p_4p_5p_6-p_1p_2p_3p_4p_5p_6.$$



$$P(A)=P(A_1(A_2+A_3)A_4)=p_1(p_2+p_3-p_2p_3)p_4.$$



$$P(A)=P((A_1+A_3)(A_2+A_4))=$$
$$=(p_1+p_3-p_1p_3)(p_1+p_3-p_1p_3).$$



$$P(A)=P((A_1+A_4)A_2(A_3+A_5))=$$
$$=(p_1+p_4-p_1p_4)p_2(p_3+p_5-p_3p_5).$$

2.27. Відрізок розділений на три рівні частини. На цей відрізок навмання кинуті три точки. Яка ймовірність того, що на кожному відрізку опиниться по одній точці.

Відповідь: $P(A)=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$.

2.28. У коробці 5 жовтих і 3 синіх фломастера. Розглянути наступні випадки:

1. З коробки витягають (послідовно або одночасно) 3 фломастери. Знайти ймовірність того, що вони всі сині.

2. Перший витягнутий фломастер повертається в коробку, після чого витягується другий фломастер. Знайти ймовірність того, що обидва вийнятих фломастери жовтого кольору.

3. З коробки послідовно без повернення беруться два фломастери. Знайти ймовірність того, що вони різних кольорів.

4. Перший витягнутий фломастер повертається в коробку, після чого витягується другий фломастер. Знайти ймовірність того, що обидва вийнятих фломастера різних кольорів.

5. З коробки у випадковому порядку один за іншим витягуються всі що знаходяться в ній фломастери. Знайти ймовірність того, що другим по порядку витягнуто синій фломастер.

Відповідь.

1. Нехай А - вихідна подія, ймовірність якої потрібно знайти, A_i - і-й витягнутий олівець зелений, тоді $A = A_1A_2A_3$. Нехай витягнення трьох олівців відбувається послідовно, тоді за правилом множення ймовірностей:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)P\left(\frac{A_3}{A_1A_2}\right) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{1}{6} = 1/56.$$

Нехай витяг трьох олівців відбувається одночасно, тоді елементарним результатом є набір будь-яких трьох олівців. Число всіх таких наборів дорівнює числу сполучень з восьми по три, тобто $C_8^3 = 56$. Число сприятливих елементарних фіналів для настання події А дорівнює числу сполучень з трьох по три, тобто $C_8^3 = 56$. Тоді за класичною формулою обчислення ймовірностей $P(A) = 1/56$.

2. Нехай В - вихідна подія, ймовірність якої потрібно знайти. Нехай Ві - і-й витягнутий олівець червоний, тоді$B = B_1B_2$, причому події B_1 і B_2 незалежні. За правилом множення ймовірностей незалежних подій $P(B) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{5}{8} * \frac{5}{8} = 25/64$.

3. Нехай С – вихідна подія, ймовірність якої потрібно знайти, тоді $C = A_1B_2 + B_1A_2$, причому події A_1B_2 та B_1A_2 несумісні. За правилами додавання ймовірностей несумісних подій і добутку ймовірностей залежних подій:

$$P(C) = P(A_1B_2 + B_1A_2) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2) =$$

$$= P(A_1)P\left(\frac{B_2}{A_1}\right) + P(B_1)P\left(\frac{A_2}{B_1}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = 15/28.$$

4. Означення ті ж, що і в 3 пункті. Оскільки це задача з поверненням, то

$$P(C) = P(A_1B_2 + B_1A_2) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2) =$$

$$= P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = 15/28.$$

5. Елементарним результатом в розглянутому випадку є впорядкований набір витягнутих 8 олівців. Число усіх таких наборів $n = \frac{8!}{5!3!} = 56.$ Число $m = \frac{7!}{5!2!} = 21,$ тоді ймовірність вихідної події D дорівнює P(D)=21/56=3/8. Розглянемо інший спосіб вирішення. Нехай D – вихідна подія, тоді $D = A_1A_2 + B_1A_2,$

$$P(D) = P(A_1A_2 + B_1A_2) = P(A_1)P\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + P(B_1)P\left(\frac{B_1}{A_2}\right),$$

$$P(D) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = 3/8.$$

2.29. У групі туристів ,які відправляються закордон 65% володіють англійською мовою, 45% – німецькою та 20% – і англійську і німецьку мови. Знайти ймовірність того, що випадково обраний турист із цієї групи не знає ні однієї з цих мов.

Відповідь: 0,1

2.30. З колоди, яка складається з 36 карт одночасно було вилучено 3 карти. Знайти ймовірність подій: А – серед обраних карт буде хоча б одна пікова або хоча б одна червова; Відповідь: 0,799. В –усі карти різних мастей .

Відповідь: 0,718.

2.31. З колоди, яка складається з 36 карт одночасно було вилучено 3 карти.Знайти ймовірність того,що це будуть трійка, семерка та туз. Задачу вирішити для одночасного та послідовного вилучення цих карт.

Відповідь: 0,009.

2.32. Три стрільця, що мають по 4 патрона, ведуть стрілянину кожен по своїй мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,9, другим - 0,8, третім - 0,7. При першому ж попаданні в мішень стрілок припиняє стрілянину.

Знайти ймовірності наступних подій:

А - у всіх стрільців разом залишиться невитраченим хоча б один патрон; *Відповідь:* 0,999999784.

В - ні в кого зі стрільців не буде витрачений увесь боєзапас; *Відповідь:* 0,994.
С - тільки один із стрільців витратить весь боєзапас. *Відповідь:* 0,036

2.33 Відбувається повітряний бій між винищувачем і бомбардувальником. Винищувач першим робить постріл. Імовірність збити їм бомбардувальника цим пострілом дорівнює 0,2. Якщо бомбардувальник не збитися, то він робить постріл. Імовірність збити їм винищувача одним пострілом дорівнює 0,3. Якщо винищувач цим пострілом не були збитий, то він робить наступний постріл з ймовірністю попадання 0,4.

Знайти ймовірності наступних подій:

А - збитий бомбардувальник;

Відповідь: 0,424.

В - збитий винищувач;

Відповідь: 0,24.

С - жоден з літаків не збитий.

Відповідь: 0,336.

2.34. Проводиться 8 пострілів по мішені з ймовірністю попадання в неї 0,7. Знайти ймовірності наступних подій:

а) А - потрапляння і промахи чергуються;

Відповідь: $2 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^5 = 0{,}0016$

б) Усього чотири попадання, причому всі вони з 5-го по 8-й постріл. *Відповідь:* $C_5^4 p^4 q^4 = 5 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^4 \approx 0{,}026$

2.35. Два гравці по черзі викидають дві гральні кістки. Виграє той, у кого в сумі випаде 12 очок. Знайти ймовірність виграшу для кожного гравця. *Відповідь:* 0,027.

2.36. Читач розшукує книгу в трьох бібліотеках. Ймовірності того, що книга є або відсутній у фонді бібліотеки, а також того, що вона видана чи ні, однакові. Обчислити ймовірність того, що читач знайде потрібну книгу. *Відповідь*: 0,58.

2.37. Через автобусну зупинку з однаковою частотою проходять автобуси семи маршрутів. Пасажир очікує автобус одного з маршрутів № 1, № 5 або № 7. Яка ймовірність того, що потрібний автобус буде одним з перших трьох підійшли до зупинки?

Відповідь: 0,89.

2.38. Знайти ймовірність того, що при п'ятикратному киданні гральної кістки шість очок з'являться хоча б один раз.

Відповідь: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}59.$

2.39. Імовірність того, що покупцеві необхідне взуття 41-го розміра, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що п'яти першим покупцям потрібно взуття 41-го розміру.

Відповідь: $\left(\frac{1}{5}\right)^5 \approx 0{,}00032$..

2.40. Гральна кість була підкинута тричі. Знайти ймовірність того, що випадуть шість очок: а) під час першого кидка; б) при одному кидку; в) хоча б при одному кидку ; г) не більш, ніж при одному кидку. *Відповідь*: а) 1/6; б) $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}374$; в) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}421$; г) 0,374+0,579=0,953.

2.41. Зроблені три постріли по одній і тій же мішені. Імовірність попадіння при першому пострілі дорівнює 0,4, при другому - 0,5 і третьому - 0,7. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох пострілів по цілі відбулось: а) одне влучення; б) хоча б одне влучення; в) два влучення; г) три влучення; д) хоча б два влучення. *Відповідь*: а) 0,36; б) 0,91; в) 0,41; г) 0,14; д) 0,55.

2.42. З шести карток з буквами Л, І, Т, Е, Р, А обрані навмання і розташовані в ряд зліва направо чотири. Знайти ймовірність того, що при цьому вийшло слово тире.

Відповідь: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{360}$.

2.43. Букви А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К розташовані в ряд у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що вийшло слово МАТЕМАТИКА. *Відповідь:* $\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3!2!2!}{10!}$.

2.44. Імовірність того, що подія А настане хоча б один раз в двох випробуваннях, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність настання події А в одному випробуванні, вважаючи, що вона не змінюється від випробування до випробувальних нию.

Відповідь: $1 - (1-p)^2 = 0{,}75 => p = 0{,}5$.

2.45. При одному циклі огляду радіолокаційної станції об'єкт виявляєтся ймовірністю p. Знайти ймовірність того, що об'єкт буде виявлений при n циклах.

Відповідь: $1 - (1-p)^n$.

2.46. Є m радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл огляду виявляє об'єкт з ймовірністю р (незалежно від інших циклів і інших станцій). За час Т кожна станція встигає зробити n циклів.

Знайти ймовірність наступних подій:

А - об'єкт виявлений хоча б однієї зі станцій;

В - об'єкт виявлений кожною станцією.

Відповідь: $P(A) = 1 - (1-p)^{mn}$, $P(B) = (1 - (1-p)^n)^m$

2.47. Прилад складається з n блоків, з'єднаних послідовно. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного з ймовірністю р кожен. Знайти надійність (ймовірність безвідмовної роботи) приладу.

Відповідь: p^n.

2.48. Для підвищення надійності приладу він дублюється іншим, точно таким же приладом, надійність (ймовірність безвідмовної роботи) кожного приладу дорівнює р. При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве перемикання на другий (надійність переключающого пристрою дорівнює одиниці). Знайти надійність системи двох дублюючих один одного приладів

Відповідь: $1 - (1-p)^2$.

2.49. В умовах задачі 2.48 надійність перемикаючого пристрою, що забезпечує перемикання з першого приладу на другу, дорівнює p_1.

Відповідь: $1 - (1-p)(1-p_1p)$.

2.50. Для підвищення надійності приладу він дублюється (n -1) іншими такими ж приладами, з'єднаними паралельно. Надійність кожного з *n* приладів дорівнює *p*. Знайти надійність Р (А) системи з *n* приборів.

Відповідь: $1 - (1-p)^n$

2.51. В умовах задачі 2.50 надійність кожного перемикаючого приладу, що забезпечує перемикання з відмовившого першого приладу на відповідний інший, дорівнює p_1. *Відповідь*: $1 - (1-p)(1-p_1p)^{n-1}$

2.5. Формула повної ймовірності

Нехай подія А може настати за умови настання однієї з подій H_1, H_2,..., H_n, *так званих гіпотез які утворюють повну групу подій, тобто які відповідають умовам:*

1)$H_iH_j = \varnothing$ *i≠j;*

2) $\sum_{i=1}^{n} \quad H_1 = \Omega$.

Тоді $A = \Omega A = \sum_{i=1}^{n} \quad (H_i A)$, *та застосовуючи формулу множення ймовірностей, можна отримати наступну рівність:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \quad P(H_i)P(\frac{A}{H_i}).$$

Ця рівність називається ***формулою повної ймовірності***.

2.52. Чи утворюють повну групу події в зазначених дослідах?

1. Проводиться одноразове кидання монети. Події A_1 - поява герба; A_2 - поява цифри. *Відповідь*: так.

У нашому прикладі результатом кидання монети може бути тільки наступ одного з попарно несумісних подій A_1 або A_2, тобто ці події утворюють повну групу.

2. Проводиться одноразове кидання двох монет. Події: B_1 - поява двох гербів; B_2 - поява двох цифр.

Відповідь: ні.

2.53. Чи утворюють повну групу події в зазначених дослідах?

1. Робляться два постріли по мішені. Події:

C_0- жодного попадання;

C_1- одне влучення;

C_2 - два попадання. *Відповідь*: так.

2. Робляться два постріли по мішені. Події:

D_1 - хоча б одне влучення;

D_2- хоча б один промах. *Відповідь*: ні.

3. Виймається карта з колоди в 36 карт. Події:

E_1 - поява карти червоної масті;

E_2- поява карти бубнової масті,

E_3 - поява карти трефової масті. *Відповідь*: ні.

2.54. Партія транзисторів, серед яких 10% дефектних, надійшла на перевірку. Перевірка якості така, що з імовірністю 0,95 виявляє дефект, а з ймовірністю 0,03 визнає справний транзистор дефектним. Знайти ймовірність того, що випадково обраний транзистор визнаний дефектним.

Відповідь: 0,122.

2.55. Туристи виходять з пункту $П_1$, вибираючи щоразу на розвилці доріг подальший шлях навмання. Знайти ймовірність того, що вони потраплять в пункт $П_2$. Схема доріг наступна:

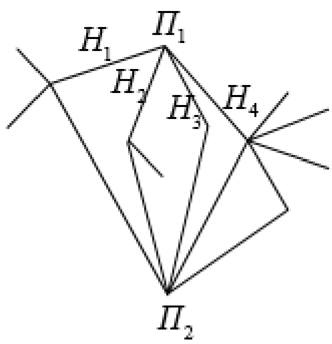


Рис. 18

Відповідь: 67/120.

2.56. На трьох різних верстатах виготовляються однакові деталі. Продуктивність 1-го верстата за зміну становить 40 деталей, другого - 35, третього - 25 деталей. Відомо, що 2, 3 і 5% продукції цих верстатів відповідно мають приховані дефекти. В кінці зміни на контроль взято деталь. Знайти ймовірність того, що вона з дефектом.

Відповідь: 0,031.

2.57. На столі п екзаменаційних білетів. Студент знає відповіді на т квитків. Коли найімовірніше студенту взяти "щасливий" квиток, якщо він підійде до столу першим або другим?

Відповідь: $\frac{m}{n}$, тобто однаково ймовірно.

2.58. У кожній з трьох коробок міститься 6 чорних і 4 білих кулі. З першої коробки в другу перекладають кулі, після чого з другої коробки в третю перекладають ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що взята навмання з третьої коробки куля виявиться білою.

Відповідь: 0,4.

2.59. З першого автомата на збірку надходить 40%, з другого - 30%, з третього - 20%, з четвертого - 10% всіх деталей. Серед деталей, виготовленні на першому автоматі, 0,1% бракованих, на другому - 0,2%, третьому - 0,25%, четвертому - 0,5%. Знайти ймовірність того, що на збірку надійшла бракована деталь.

Відповідь: 0,002.

2.60. Брак виду А (брак А) в продукції заводу складає 5%, причому серед забракованої з цього виду продукції в 10% випадків зустрічається і брак виду В (брак В), а в продукції, вільної від браку А, браку В зустрічається в 1% випадків. Знайти ймовірність не зустріти брак В у всій продукції.

Відповідь: 0,9855.

2.61. З першого автомата на збірку надходить 40%,з другого – 30%, з третього – 20 з четвертого – 10% деталей. Перший автомат дає в середньому 0,2% браку, другий - 0,3%, третій - 0,1%. Знайти ймовірність того, що надійшла на зборку деталь бракована.

Відповідь:
0,0018.

2.62. Обстежено 200 пар батьків з синами з метою перевірки, чи мають залежність між їх професіями. Серед цих пар виявилося 40 батьків та 50 синів, які мають однакову професію, причому у 25 синів професія збігається з професією батька. Знайти ймовірність того, що 1) у батька і сина збігаються професії, 2) у батька і сина професії не збігаються, причому через батька.
Відповідь: 1) 0,625; 2) 0,15625.

2.63. Радіолокаційна станція веде спостереження за об'єктом, котрий може застосовувати чи не застосовувати перешкоди. Якщо об'єкт не застосовує перешкод, то за один цикл огляду станція виявляє його з ймовірністю p_0, якщо застосовує, то з ймовірністю $p_1 (p_1 < p_0)$. Імовірність того, що під час циклу застосовані перешкоди, дорівнює p_2 і не залежить від того, як і коли застосовувалися перешкоди в інших циклах. Знайти імовірність того, що об'єкт може бути виявлений хоча б один раз за *n* циклів огляду.

Відповідь: $1 - (1 - (1 - p_2)p_0 - p_2 p_1)^n$.

2.64. Радіолампа може належати одній з трьох партій з ймовірностями p_1, p_2, p_3, де p_1=p_3 = 0,25, p_2= 0,5. Ймовірності того, що лампа пропрацює заданий число годин, рівні відповідно 0,1, 0,2, 0,4. Знайти ймовірність події: навмання взята радіолампа пропрацює задане число годин.

Відповідь: 0,225.

2.65. П'ятнадцять екзаменаційних білетів містять по два питання, які не повторюються. Студент знає відповіді тільки на 25 питань. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього йому достатньо відповісти на два питання з одного квитка або на одне питання з першого квитка і на вказаний додаткове питання з другого квитка.
Відповідь:

$$\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}+\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}\cdot\frac{24}{28}=\frac{190}{203}$$

2.66. У першій урні містилося дві білі та три чорні кулі, у другій - три білі та дві чорні, у третій - чотири білі та дві чорні. Навмання обрану кулю з першої урни переклали в другу, після чого навмання обрану кулю з другої урни переклали в третю, а з третьої - в першу. Знайти ймовірність того, що в першій урні виявився початковий за кольором склад куль.

Відповідь:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{7}=\frac{101}{210}\approx 0{,}48.$$

2.67. Прилад складається з двох дублюючих один одного вузлів А і В, з'єднаних паралельно, і може випадковим чином працювати в одному з двох режимів: сприятливому і несприятливому. У сприятливому режимі надійність кожного з вузлів дорівнює p_1, в несприятливому - p_2. Імовірність того, що прилад буде працювати в сприятливому режимі, дорівнює p_3, в несприятливому (1-p_3). Знайти надійність приладу (ймовірнісь безвідмовної роботи).

Відповідь: $p_3(1-(1-p_1)^2)+(1-p_3)(1-(1-p_2)^2$

2.68. На телефонну станцію надходить випадковий потік викликів. Ймовірність надходження $к$ викликів за час t дорівнює $p_k(t)$ (k=0, 1, 2..). Число викликів, що надійшли за проміжок часу t, не залежить від того, скільки викликів надійшло до чи після цього проміжку. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу $2t$ надійде l викликів.

Відповідь: $P(A)=\sum_{k=0}^{l} \quad P(H_k)P\left(\frac{A}{H_k}\right)=\sum_{k=0}^{l} \quad p_k(t)p_{l-k}(t).$

2.69. В магазин привозять пальто від трьох фабрик. Продукція першої фабрики містить 30% виробів 48-го розміру, другої – 40%, третьої – 35%. З якою ймовірністю покупець буде мати можливість придбати пальто 48-го розміру, якщо в магазині на продаж виставлено 30% пальто першої фабрики, 20% – другої и 50% – третьої?

Відповідь: 0,345

2.70. У групі студентів три відмінника, п'ять студентів навчаються добре, а шість займаються слабо. Відмінники на прийдешньому екзамені можуть отримати тільки відмінні оцінки, «хорошисты» – з рівною ймовірністю добрі і відмінні оцінки. Інші студенти можуть з однаковою ймовірністю отримати добрі, задовільні і незадовільні оцінки. Для відповіді на екзамені викликають обраного навмання студента. Яка ймовірність того, що він отримає оцінку «добре»? *Відповідь*: 0,46

Яка ймовірність того, що екзамен складав студент, що займався слабо, якщо екзамен складено на «добре»? *Відповідь*: 0,3

2.71. Є n урн, в кожній з яких a білих куль і b чорних. З першій урни в другу переклали одну кулю, потім з другої в третю теж одну кулю і так далі до n-ї урни, з якої витягли кулю. Знайти ймовірність того, що він білий.

Відповідь: $a/(a+b)$.

2.72. У першому ящику три білих і п'ять чорних куль. У другому - шість білих і вісім чорних куль. З першого ящика в другій перекладають дві навмання витягнуті кулі. Після цього з другого ящика навмання витягують одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла. *Відповідь*: 0,48

Знайти ймовірність того, що з першого ящика витягнули чорні кулі, якщо відомо, що з другого ящика витягнули білу кулю. *Відповідь*: 0,28

2.73. Курс рубля підвищується протягом кварталу з ймовірністю 0,9 і знижується з ймовірністю 0,1. При підвищенні курсу рубля фірма розраховувала отримати прибуток з ймовірністю 0,85, а при зниженні - 0,5. Знайти ймовірність того, що фірма отримає прибуток.

Відповідь: 0,815.

2.74. У коробці 20 воланів для бадмінтону. З них 14 нових і 6 раніше використаних. Для першої гри навмання вибирають три волана, після гри їх повертають назад в коробку. Для другої гри знову навмання з коробки дістають ще два волана. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитись одним новим і одним старим воланами?

Відповідь: 0,51.

2.75. На полиці десять старих і шість нових CD-дисків. навмання виймаються чотири диска і замінюються на нові. Після цього знову навмання дістають два диска. Знайти ймовірність того, що ці диски нові. *Відповідь*: 0,27.

Знайти ймовірність того, що спочатку витягнуті старі диски, якщо вдруге з полки були зняті обидва нових. *Відповідь*: 0,16.

2.6. Формула Байеса

Нехай знаходимося в умовах постановки задачі для формули повної ймовірності. Відомо, що

$$P(AH_i) = P(A)P\left(\frac{H_i}{A}\right) = P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right).$$

Тоді умовна ймовірність $P\left(\frac{H_i}{A}\right)$ *гіпотези* H_i *за умови, що подія A сталося, визначається за формулою*

$$P\left(\frac{H_i}{A}\right) = \frac{P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{A},$$

яка називається ***формулою Байеса***. *Ця формула дозволяє переглянути ймовірності гіпотез після настання події A.*

Зауваження:

1. Значення P (A) обчислюється за формулою повної ймовірності.

2. Чисельник формули є i-ю складовою у формулі повної ймовірності.

3. Формула Байеса застосовується в задачах, в яких вихідна подія сталося.

2.76. У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 забезпечені оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець вразить ціль з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95, а з гвинтівки без оптичного прицілу - 0,8. Стрілець влучив у ціль. Що імовірніше, стріляв він з гвинтівки з оптичним прицілом або без нього? *Відповідь*: 19/43, 24/43.

2.77. Є три партії деталей по 20 штук в кожній. Число деталей в першій, в другій і в третій партії відповідно дорівнює 20, 15 і 10. З навмання обраної партії витягнута деталь, яка виявилася стандартною. Деталь повертається назад, і вдруге з цієї ж партії навмання витягується деталь, яка теж виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі були витягнуті з третьої партії. *Відповідь*: 4/29.

2.78. На полиці стоять 5 відеокасет із записами концертів і 8 касет із записами фільмів. З полиці навмання прибрані 3 касети, а з решти на ній випадковим чином вибирають дві. Вибрані дві касети виявилися із записами концертів. Знайти ймовірність того, що вилучені спочатку всі 3 касети містили записи фільмів.

Розв'язок. Нехай *A* - вихідна подія, тобто дві витягнуті касети містили записи концертів. Введемо наступні гіпотези, що відображають склад трьох прибраних касет:

H_0 - все касети з фільмами;

H_1 - одна касета з концертом і дві з фільмами;

H_2 - дві касети з концертами і одна з фільмом;

H_3 - все касети з концертами.

Гіпотези H_0, H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу подій. При цьому

$$P(H_0) = \frac{C_8^3}{C_{13}^3} = \frac{28}{143}; P(H_1) = \frac{C_8^2 C_5^1}{C_{13}^3} = \frac{70}{143};$$

$$P(H_2) = \frac{C_8^1 C_5^2}{C_{13}^3} = \frac{40}{143}; P(H_3) = \frac{C_5^3}{C_{13}^3} = \frac{5}{143}.$$

Для контролю необхідно знайти суму ймовірностей гіпотез, яка має дорівнювати одиниці:

$$\sum_{i=0}^{3} P(H_i) = \frac{28}{143} + \frac{70}{143} + \frac{40}{143} + \frac{5}{143} = 1$$

Знайдемо тепер умовні ймовірності події *A* в залежності від гіпотез:

$$P\left(\frac{A}{H_0}\right)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9};\ P\left(\frac{A}{H_1}\right)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15};$$

$$P\left(\frac{A}{H_2}\right)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{30};\ P\left(\frac{A}{H_3}\right)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3} P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)=\frac{28}{143}\cdot\frac{2}{9}+\frac{70}{143}\cdot\frac{2}{15}+\frac{40}{143}\cdot\frac{1}{30}+\frac{5}{143}\cdot\frac{1}{45}=\frac{17}{143}$$

Тепер можна скористатися формулою Байеса, з якої випливає, що

$$P\left(\frac{H_0}{A}\right)=\frac{P(H_0)P\left(\frac{A}{H_0}\right)}{P(A)}=\frac{56}{153}.$$

До проведення досліду $P(H_0)=\frac{28}{143}$, тобто ймовірність гіп1отези H_0 зросла

2.79. Екзаменаційний білет з математики містить три питання з трьох різних, непересічних розділів курсу. Іспит вважається не складеним, якщо студент не дає правильної відповіді, принаймні, на два питання. Студент Середняков підрахував, що з першого розділу курсу він не підготував 1/5 частину питань, з другого - 2/5, з третього - 3/5. Середняков іспит не склав. Знайти ймовірність того, що Середняков не відповів на перше і третє питання.

Розв'язок. Нехай подія *A* полягає в тому, що Середняков іспит не склав. Під час складання іспиту могли відбутися такі гіпотези:

H_1 - студент не відповів на всі три питання;
H_2 - студент не відповів на перший і другий питання;
H_3 - студент не відповів на перший і третій питання;
H_4 - студент не відповів на другий і третій питання;
H_5 - студент не відповів лише на перше питання;
H_6 - студент не відповів лише на друге питання;
H_7 - студент не відповів лише на третє питання;

H_8 - студент відповів на всі питання.
Можна переконатися, що ці гіпотези утворюють повну групу подій. Користуючись теоремою множення ймовірностей незалежних подій, знайдемо ймовірності гіпотез:
$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}048,$ $\quad P(H_5) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}048,$

$$P(H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}032, \quad P(H_6) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}128,$$

$$P(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}072, \quad P(H_7) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}288,$$

$$P(H_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}192, \quad P(H_8) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}192.$$

Сума всіх отриманих ймовірностей дорівнює 1. За умовою завдання потрібно знайти умовну ймовірність $P(\frac{H_3}{A})$.

Скористаємося формулою Байеса

$$P\left(\frac{H_3}{A}\right) = \frac{P(H_3)P(\frac{A}{H_3})}{P(A)},$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою повної ймовірності

$$P(A) =$$
$$= \sum_{i=1}^{8} P(H_i)P(\frac{A}{H_i}) = 0{,}048 + 0{,}032 + 0{,}072 + 0{,}192 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0{,}344.$$

Тоді $P\left(\frac{H_3}{A}\right) = \frac{0{,}072}{0{,}344} = 0{,}209.$

2.80. У студентській групі 80% юнаків. 20% юнаків і 35% дівчат мають мобільні телефони. Після занять в групі виявлено забутий кимось телефон. Що імовірніше, телефон загублений дівчиною чи юнаком?

Відповідь: з ймовірністю 0,484 дівчиною, 0,516 - юнаком.

2.81. Прилад складається з двох вузлів, справність кожного з яких необхідна для роботи приладу в цілому. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t) першого вузла дорівнює 0,8, другого - 0,9. В результаті випробувань протягом часу t прилад вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що в цей час перший вузол відмовив, а другий - ні.

Відповідь: 0,64.

2.82. Перед посівом 80% всього насіння обробили отрутохімікатами. Імовірність враження шкідниками рослин, що проросли з цього насіння, дорівнює 0,06. Імовірність враження шкідниками рослин, що проросли з необроблених насіння, дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що взята навмання рослина виявиться ураженою? Якщо рослина уражена, то наскільки ймовірним є те, що її вирощено з обробленого насіння?

Відповідь: 0,108; 0,444.

2.83. В умовах задачі 2.61 знайти ймовірність того, що виявлену браковану деталь виготовлено на першому автоматі.

Відповідь: 0,222.

2.84. Серед деталей, які надходять на зборку з першого автомата 0,1% бракованих, з другого - 0,2%, з третього - 0,25%, з четвертого - 0,5%. Продуктивності автоматів співвідносяться, як 4: 3: 2: 1 відповідно. Узята навмання деталь виявилася стандартною. знайти ймовірність того, що вона виготовлена: 1) на першому; 2) другому; 3) третьому; 4) четвертому автоматі. Перевірити вірність обчислень.

Відповідь: 1) 0,4004; 2) 0,3000; 3) 0,1999; 4) 0,00997.

2.85 Телеграфне повідомлення складається з сигналів "точка" і "тире". Статистичні дані завад такі, що спотворюються в середньому 2/5 повідомлень "точка" і 1/3 повідомлення "тире". Відомо, що сигнали "точка" і "тире" зустрічаються у відношенні 5: 3. Знайти ймовірність того, що прийнятий сигнал, що передається: 1) «точка»; 2) «тире».

Відповідь: 0,75; 0,5.

2.86. З 18 стрільців 5 влучають в мішень з імовірністю 0,8, 7 - з ймовірністю 0,7, 4 - з ймовірністю 0,6, 2 - з ймовірністю 0,5. Навмання обраний стрілок зробив постріл, але в мішень не поцілив. До якої з груп найімовірніше належить цей стрілок?

Відповідь: до другої.

2.87. Три мисливця одночасно вистрілили по качці, яка була вбита однією кулею. Знайти ймовірності того, що качка вбита першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності попадання кожним з них дорівнюють відповідно 0,2, 0,4, 0,4.

Відповідь: 0,103; 0,297; 0,0,620.

2.88. У групі з 10 студентів, які прийшли на іспит, 3 підготовлені відмінно, 4 - добре, 2 - посередньо і 1 - погано. У екзаменаційних білетах є 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 запитань, добре підготовлений на 16, посередньо - на 10, погано підготовлений - на 5. Викликаний навмання студент відповів на три довільно заданих питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений: 1) відмінно; 2) погано.

Відповідь: 0,58; 0,002.

2.89. Прилад складається з двох вузлів, з'єднаних послідовно. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу T) першого вузла дорівнює p_1, другого - p_2. Прилад випробовувався протягом часу T, в результаті чого виявлено, що він вийшов з ладу (відмовив). Знайти ймовірність того, що відмовив тільки перший вузол, а другий справний. *Відповідь*: $\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$

2.90. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю p_3 надходить суміш корисного сигналу із завадою, а з ймовірністю 1- p_3 - тільки одна завада. Якщо надходить корисний сигнал із завадою, то пристрій реєструє наявність кожного сигналу з ймовірністю p_1, якщо тільки завада - з ймовірністю p_2. Пристрій зареєструвало наявність якогось сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

Відповідь: $\frac{p_1p_3}{p_1p_3+p_2(1-p_3)}$.

2.91. Пасажир може звернутися за отриманням квитка в одну з трьох кас. Ймовірності звернення в кожну касу залежать від їх місця розташування і дорівнюють відповідно 0,2, 0,3, 0,5. Імовірність того, що до моменту приходу пасажира наявні в касі квитки будуть розпродані, дорівнюють для першої каси 0,1, для другої - 0,2, для третьої - 0,7. Пасажир попрямував за квитком в одну з кас і придбав квиток. Знайти ймовірність того, що це була перша каса.
Відповідь: 0,316.

3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ.

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Нехай деякий експеримент (дослід) проводиться n раз в незмінних умовах. Кожне таке проведення експерименту назвемо випробуванням. Ці випробування називаються незалежними щодо події А, якщо ймовірність його настання в кожному з n випробувань не залежить від результатів інших випробувань. Ставиться завдання знайти ймовірність $P_n(k)$ *того, що в n незалежних випробуваннях подія А з'явиться k раз, якщо ймовірність настання події А в кожному випробуванні постійна і дорівнює числу* $p = P(A)$

Нехай проведено n незалежних випробувань і в будь-яких k з них настала подія А, тоді ймовірність настання k раз події А в цьому варіанті за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює $p^k p^{n-k}$ *, де q=1-p.Так як число різних варіантів дорівнює* C_n^k*, то за теоремою додавання ймовірностей*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Це рівність називається ***формулою Бернуллі****.*

3.1. Імовірність того, що футболіст влучить у ворота, дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що футболіст з чотирьох спроб один раз влучить у ворота.
Відповідь: 0,42.

3.2. Монету кидають 8 разів. Знайти ймовірність того, що 4 рази випаде цифра. *Відповідь*: 70/256.

3.3. Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 6 деталей більше 4 будуть стандартними. *Відповідь:* 0,9943.

3.4. Пристрій складається з 8 діючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за час T відмовить пристрій, якщо для цього достатньо відмови хоча б 3 елементів з 8.

Відповідь: 0,203.

3.5. Проводиться 8 пострілів по мішені з ймовірністю попадання в неї 0,7. Знайти ймовірність того, що число влучень не менш двох.

Розв'язання. Знаходження ймовірності вихідної події A дозволяє застосувати формулу Бернулі, вважаючи кожен постріл незалежним випробуванням з ймовірністю успіху, що дорівнює $p=0,7$ та $q=0,3$.

$P(A) = 1 - P(\underline{A}) = 1 - \left(P_8(0) + P_8(1)\right)$. Для обчислення ймовірності $P_8(0)$ та $P_8(1)$ застосуємо формулу Бернулі.

$P_8(0) = C_8^0 \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^8 = 0{,}00006561,\ P_8(1) = C_8^1 \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^7 = 0{,}00122472$

Тоді $P(A) = 1\text{-}(P_8(0) + P_8(1)) \approx 0{,}9987$.

3.6. Пару однакових кубиків кидають 7 разів. Знайти ймовірності наступних подій:

A - двічі сума очок дорівнює 7;

B - хоча б один раз сума очок дорівнює 7;

C - кожен раз сума очок більше 7;

D - жодного разу сума очок не дорівнює 12.

Відповідь: 0,234; 0,721; 0,00218; 0,821.

3.7. Імовірність виграти по одному лотерейному квитку дорівнює 1/7. Знайти ймовірність при шести квитках виграти: 1) за двома квитками; 2) за трьома квитками; 3) не менше, ніж за двома квитками; 4) не виграти за двома квитками.

Відповідь: 0,1652; 0,0367; 0,2064; 0,0037.

3.8. На автобазі є 12 автобусів. Ймовірність виходу на лінію кожного з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автобази в найближчий день, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше 8 автобусів.

Відповідь: 0,9017.

3.9. У сім'ї десятеро дітей. Вважаючи ймовірності народження хлопчика і дівчинки однаковими, знайти ймовірність того, що в цій сім'ї: 1) п'ять хлопчиків; 2) хлопчиків не менше трьох, але не більше восьми.

Відповідь: 63/256; 957/1024.

3.10. Прилад складається з 10 вузлів, з'єднаних паралельно. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу Т) для кожного вузла дорівнює р. Вузли виходять з ладу незалежно один від іншого. Знайти ймовірність того, що за час Т: 1) відмовить хоча б один вузол; 2) відмовлять не менше двох вузлів.

Відповідь: $1-(1-p)^{10}, 1-(1-p)^{10}-10p(1-p)^{9}$.

3.11. При в'їзді в нову квартиру в освітлювальну мережу було включено 2κ нових електролампочок. Кожна електролампочка протягом року перегорає з ймовірністю р. Знайти ймовірність того, що протягом року не менше половини спочатку включених лампочок доведеться замінити новими.

Відповідь: $1-\sum_{m=0}^{k-1} C_{2k}^{m} p^{m}(1-p)^{2k-m}$.

3.12. (Завдання Банаха). У курця завжди в кишені дві коробки сірників. У кожній з них було спочатку по *n* сірників. Кожний раз, коли був необхідний сірник, він обирав навмання одну з коробок. Очевидно, що міг настати момент, коли він вперше дістав порожню коробку, а в іншій могло виявитися, наприклад, жодної, одна, дві, ..., всі n сірників. Знайти ймовірність того, що в зазначений момент в іншій коробці виявилося: 1) *к* сірників; 2) не більше *к* сірників.

Відповідь: $(\frac{1}{2})^{2n-k} C_{2n-k}^{n}, \sum_{i=0}^{k} \quad (\frac{1}{2})^{2n-i} C_{2n-i}^{n}.$

3.13. Що імовірніше, виграти у рівносильного противника: 1) три партії з чотирьох чи п'ять з восьми; 2) не менше трьох партій з чотирьох або не менше п'яти партій з восьми?

Відповідь: 1)1/4, 7/32; 2) 5/16, 93/256.

3.14. Прилад, що складається з *к* вузлів, працює протягом часу *T*. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) кожного вузла за час *T* дорівнює *p*.Після закінчення часу *T* прилад зупиняється, технік оглядає його і замінює вузли, що вийшли з ладу. На заміну одного вузла йому потрібен час τ. Знайти ймовірність того, що через певний час 2τ після зупинки прилад буде готовий для нормальної роботи.

Відповідь: $p^k + kp^{k-1}(1-p) + \frac{k(k-1)}{2} p^{k-2}(1-p)^2.$

3.15. При обертанні антени радіолокатора на один оберот за час спостереження точкової цілі (літак, ракета) встигають відбитися 8 імпульсів. Знайти ймовірність виявлення цілі за один оборот антени радіолокатора, якщо для цього необхідно проходження через приймач не менше 5 імпульсів, а ймовірність придушення імпульсу перешкодою в приймачі дорівнює 0,1, і придушення різних імпульсів перешкодами суть незалежні події

Відповідь: 0,999976.

3.16. У певному регіоні живуть 20% брюнетів, 30% шатен, 40% блондинів і 10% рудих. Обирається навмання група з шести чоловік. Знайти ймовірності наступних подій:

A - в складі групи щонайменше чотири блондинів;

B - в групі хоча б один рудий;

C - в складі групи рівне число блондинів і шатен.

Відповідь: $P(A) \approx 0{,}455$; $P(B) \approx 0{,}468$; $P(C) \approx 0{,}181$.

3.17. Імовірність того, що покупцю потрібно взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з п'яти покупців взуття цього розміру знадобиться: а) одному; б) принаймні одному.

Відповідь: а) 0,4096;   б) 0,6723.

3.18. Тест складається з п'яти питань, на кожен з яких дається чотири варіанти відповіді, причому правильний з них один. Знайти ймовірність того, що студент, що обирає кожен раз відповідь навмання, дасть: а) три правильних відповіді; б) не менше трьох правильних відповідей.

Відповідь: а) 0,176;   б) 0,203.

Найімовірніше число подій

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

3.19. Імовірність відмови кожного приладу при випробуванні дорівнює 0,2. випробувано 9 приладів. Знайти найімовірніше число відмовивших приладів і ймовірність цієї події.

Відповідь: $k = 1,\ 2$; 0,302.

3.20. Імовірність того, що випадковий пасажир запізниться до моменту відправлення поїзда, дорівнює 0,02. Знайти найбільш ймовірне число тих, хто запізнився з 855 пасажирів.

Відповідь: 17.

3.21. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Знайти найімовірніше число влучень і ймовірність такого результату стрільби, якщо зроблено 9 пострілів.

Відповідь: 7 або 8; 0,302.

3.22. Імовірність того, що грошовий приймач автомата при опусканні однієї монети спрацює неправильно, дорівнює 0,97. Скільки потрібно опустити монет, щоб найімовірніше число випадків правильної роботи автомата дорівнювало 100?

Відповідь: 103.

3.23. Скільки потрібно посіяти насіння, ймовірність проростання яких становить 70%, щоб найімовірніше число непроросшого насіння дорівнювало 60?

Відповідь: $199 \leq n \leq 202$.

Асимптотичні формули в схемі Бернуллі

Якщо число випробувань досить велике (n > 30), то використання формули Бернуллі недоцільне в силу необхідності виконання громіздких обчислень. Тому застосовують асимптотичні (наближені) формули.

Формула Пуассона

Якщо $npq \leq 10$ і $p \ll 0,5$ (близьке до нуля), то можна застосовувати ***формулу Пуассона*** *(формулу рідкісних явищ):*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{де } \lambda = np$$

Зауваження: для знаходження значень P_n (k) можна користуватися таблицею (дод. 3).

3.24. Деякий електронний пристрій виходить з ладу, якщо відмовить певна мікросхема. Імовірність її відмови протягом години роботи дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що за 1000 годин роботи пристрію доведеться 5 разів змінювати мікросхему.

Відповідь: 0,1563; за формулою Бернулі 0,1566.

3.25. Завод відправив на базу 500 виробів. Імовірність пошкодження виробів в дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено: а) три вироби; б) менше 3 виробів; в) більше 3 виробів; г) хоча б один виріб.

Відповідь: 0,0613; 0,9197; 0,019; 0,6321.

3.26. Пристрій складається з великого числа незалежно діючих речовин з дуже малою (однаковою) ймовірністю відмови кожного елемента за час *T*. Знайти середнє число відмовивших елементів за час *T*, якщо ймовірність того, що за цей час відмовить хоча б один елемент, дорівнює 0,98.

Розв'язок-відповідь: $e^{-\lambda} = 1 - 0.98 = 0.02 => \lambda = 3.9 \approx 4.$

3.27. Імовірність смерті людини на 21-му році життя дорівнює 0,006. Застраховані 1000 чоловік у віці 20 років. Знайти ймовірність того, що протягом року для страхової компанії настане 5 страхових випадків.

Відповідь: 0,16.

3.28. Імовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,008. Знайти найімовірніше число бракованих деталей з 1000 виготовлених і ймовірність цієї події

Відповідь: 0,1396.

3.29. Для перевірки партії з 1000 виробів, що містить 4 бракованих, проведена вибірка 50 виробів. Знайти ймовірність того, що в цій вибірці не виявиться бракованих виробів. Порівняти точне значення цієї ймовірності з наближеним, знайденим за формулою Пуассона.

Відповідь: 0,814; 0,819.

3.30. Знайти середнє число помилок на сторінці рукопису, якщо ймовірність того, що сторінка рукопису містить хоча б одну помилку, дорівнює 0,95. Передбачається, що розподіл ймовірностей числа помилок підпорядковане закону Пуассона.

Відповідь: $e^{-\lambda} = 0.05$; $\lambda = 3$.

3.31. У страховій компанії застраховано 10000 автомобілів. Імовірність поломки будь-якого автомобіля в результаті аварії дорівнює 0,006. Кожен власник застрахованого автомобіля платить в рік 2000 гривень страхових і в разі поломки автомобіля в результаті аварії отримує від компанії 50000 гривень. Знайти ймовірність того, що після закінчення року роботи страхова компанія зазнає збитку. *Відповідь:* практично неможлива подія, тобто 0.

3.32. Радіотелеграфна станція передає цифровий текст. В силу наявності перешкод кожна цифра незалежно від інших може бути неправильно прийнята з ймовірністю 0,01. Знайти ймовірності наступних подій: A - в прийнятому тексті, що містить 1100 цифр, буде менше 20 помилок; B - в цьому тексті буде зроблено рівно 7 помилок.

Відповідь: $P(A) \approx 0{,}9964; P(B) \approx 0{,}0176$.

3.33. Прядильник обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив відбудеться в п'яти веретенах.

Відповідь: $P_{1000}(5) = 0{,}156$.

3.34. Комутатор установи обслуговує 100 абонентів. Імовірність того, що протягом однієї хвилини абонент зателефонує на комутатор, дорівнює 0,02.

Яке з двох подій найімовірніше: 1) протягом однієї хвилини подзвонять 3 абонента; 2) протягом однієї хвилини подзвонять 4 абонента?

Відповідь: $P_{100}(3) = 0{,}090$; $P_{100}(4) = 0036.$

3.35. Проводяться незалежні випробування, в кожному з яких подія *A* може з'явитися з імовірністю 0,001.Знайти ймовірність того, що при 2000 випробуваннях подія *A* настане не менше двох і не більше чотирьох разів.

Розв'язок-відповідь: $P_{2000}(2 \le k \le 4) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} \approx 0{,}541.$

3.36. Рукопис обсягом в 1000 сторінок машинописного тексту міститься 1000 помилок. Знайти ймовірність того, що навмання взята сторінка містить: а) хоча б одну друкарську помилку; б) рівно 2 помилки; в) не менше двох помилок.

Відповідь: а) 0,63; б) 0,185; в) 0,2642.

3.37. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,001. Вироблено 5000 пострілів. Знайти ймовірність попадання в ціль двома і більше пострілами.

Відповідь: 0,96.

Локальна формула Муавра-Лапласа

Якщо $npq > 10$, то застосовується локальна формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$$

Зауваження: 1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$; 2) для значень функції $\varphi(x)$ є спеціальні таблиці (дод.1)

3.38. Знайти ймовірність того, що подія А настане 70 раз в 243 випробуваннях, якщо ймовірність настання цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

Відповідь: 0,0231.

3.39. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявляться 50 хлопчиків.

Відповідь: 0,0782.

3.40. Монета кинута $2N$ раз (N велике!).Знайти ймовірність того, що герб випаде N раз.

Відповідь: 0, 6542 $/\sqrt{N}$.

3.41. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 народжених дітей хлопчиків та дівчаток - порівну.

Відповідь: 0,052.

3.42. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти ймовірність 100 влучень з 320 пострілів.

Відповідь: 0,0003.

3.43. Знайти ймовірність того, що 500 посіяних насіння НЕ зійде 130, якщо схожість насіння становить 75%.

Відповідь: 0,036.

3.44. Знайти ймовірність того, що в 400 випробуваннях деяка подія з'явиться 104 рази, якщо ймовірність настання його в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Відповідь: 0,0006.

3.45. На факультеті 730 студентів. Знайти ймовірність того, що у 3 студентів день народження 1-го січня.

Відповідь: 0,22.

3.46. Застосовуючи 1) формулу Бернуллі, 2) локальну теорему Лапласа, 3) формулу Пуассона, знайти ймовірність того, що серед 200 осіб виявиться четверо лівшів, якщо в середньому лівші складають 1%.Пояснити результат обчислень.

Відповідь: 1) 0,0929; 2) 0,1038; 3) 0,090224.

Інтегральна формула Муавра-Лапласа

Для обчислення в схемі Бернуллі ймовірності того, що число k подій A в n випробуваннях виявиться в проміжку від k_1 до k_2, використовується ***інтегральна формула Муавра-Лапласа****:*

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ *та* $\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ *- функція Лапласа.*

зауваження:

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) для значень функції Лапласа є спеціальні таблиці (дод. 2)

3) при $x \ge 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

3.47. Імовірність настання події *A* в кожному з 100 випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія *A* з'явиться:

а) не менше 75 і не більше 90 разів; *Відповідь:* 0,8882.

б) не менше 75 разів; Відповідь: *Відповідь:* 0,8944.

в) не більше 74 разів. *Відповідь:* 0,0668.

3.48. Імовірність настання події *A* в кожному з *n* незалежних випробувань дорівнює 0,8. При якому найменшому значенні *n* можна очікувати з імовірністю 0,9, що подія *A* з'явиться не менше 75 разів?

Відповідь: $n = 100,$ т. я. $\frac{75-0.8n}{0.4\sqrt{n}} = -1{,}28.$

3.49. У кожен танк випускають поодинокі снаряди і перестають стріляти, як тільки він був підбитий. Імовірність поразки танка при одному пострілі з протитанкової гармати, що робить 12 пострілів в хвилину, дорівнює 0,15. Скільки потрібно мати знарядів, щоб ймовірність підбити всі 20 танків противника протягом трьох хвилин була більше 0,9?

Розв'язання. Нехай необхідна кількість гармат дорівнює *n*, причому

$n \geq 1$. За три хвилини вони виконають 36n пострілів, причому число влучань серед них повинно бути не менше 20 з ймовірністю не менше 0,9. Оскільки число влучань не менше 20, означає, що можливе число влучань належить відрізку [20, 36n]. Тоді за інтегральною формулою Лапласа

$$P(20 \leq k \leq 36n) = \Phi\left(\frac{30.6\sqrt{n}}{\sqrt{4.59}}\right) - \Phi\left(\frac{20-5.4n}{\sqrt{4.59n}}\right)$$

$$= \Phi(14.3\sqrt{n}) + \Phi\left(\frac{5.4n-20}{\sqrt{4.59n}}\right) \geq 0.9$$

В силу монотонного зростання функції Лапласа *Ф(x)*

$\Phi(14.3\sqrt{n}) \geq \Phi(14.3) \approx 0.5,$ так як $n \geq 1,$ тому маємо

$$0.5 + \Phi\left(\frac{5.4n-20}{\sqrt{4.59n}}\right) \geq 0.9, \text{звідки } \Phi\left(\frac{5.4n-20}{\sqrt{4.59n}}\right) \geq 0.4.$$

Використовуючи таблиці значень функцій Лапласа, найменше значення n з рівняння $\frac{5.4n-20}{\sqrt{4.59n}} = 1.28$. Вирішивши це рівняння ми знайдемо, що n=4.84. Таким чином, необхідно не менше гармат для влучання з вказаною за умовою ймовірністю.

3.50. Під час штампування алюмінієвих клем отримують в середньому 90% придатних. Знайти ймовірність наявності від 790 до 820 штук придатних клем з 900.

Відповідь: 0,8533.

3.51. Нехай ймовірність того, що покупцеві потрібно взуття 41-горозміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з 750 покупців не більше 120 хочуть купити взуття такого ж розміру.

Відповідь: 0,9970.

3.52. Імовірність ураження влучення стрільцем у мішень при одному пострілідорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах стрілець влучить у мішень: 1) не менше 70 і не більше 80 разів; 2) не більше 70 разів.

Відповідь: 0,7498; 0,1251.

3.53. Радіотелеграфна станція отримує цифрове текстове послання. Через наявність перешкод ймовірність помилкового прийому будь-якої цифри не змінюється протягом усього прийому і дорівнює 0,01. Вважаючи прийоми окремих цифр незалежними подіями, знайти ймовірність того, що в тексті, що містить 1100 цифр, число невірно прийнятих буде не менше 20.

Відповідь: 0,9953.

3.54. На виробництві годинників перевірка якості встановила, що в середньому 98% продукції відповідає вимогам, а 2% потребують додаткового регулювання. Приймальник перевіряє якість 30 виготовлених годинників. Якщо при цьому серед них виявиться 11 або більше годинників, які потребують додаткового регулювання, вся партія повертається на завод для доопрацювання. Визначити ймовірність того, що партія буде прийнята.

Відповідь: 0,9438.

Відхилення частоти від середнього значення в незалежних випробуваннях

$$P(|k-np|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

3.55. Подія А з`являється в кожному з 10000 незалежних випробувань з імовірністю 0,75. Знайти ймовірність того, що частота появи події відхилиться від середнього значення числа його появ по абсолютній величині не більше, ніж на 100.

Відповідь: 0,9971.

3.56. Під час проведення n незалежних випробувань в кожному з них існує ймовірність появи події А, яка становить 0,2. Знайти найменше число n випробувань, при якому з ймовірністю 0,99 можна очікувати, що частота появи події відхилиться від середнього числа за абсолютною величиною не більше ніж на 27.

Відповідь: 690.

3.57. Подія А в кожному з 900 незалежних випробувань має ймовірність появи 0,5. В яких межах з ймовірністю 0,77 знаходиться частота появи цієї події?

Відповідь: $\varepsilon=18,432< k< 468.$

3.58. У шкільній бібліотеці знаходиться 100 томів навчальної та довідкової літератури, що містить інформацію про розвиток людини. Імовірність видачі кожної з них протягом дня - 0,8. Яке максимальне число книг зазначеної тематики буде видано протягом дня з ймовірністю 0,999?

Відповідь: 92

3.59. Імовірність того, що насіння розсади проросте, дорівнює 0,9. Скільки насіння потрібно посадити, щоб з ймовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 з них проросте?

Відповідь: $n\geq 177$

Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\frac{n}{\sqrt{pq}}\right)$$

3.60. Імовірність появи події А в кожному з 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

Відповідь: 0,9876.

3.61. Імовірність появи події А в кожному з n незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти найменше число n випробувань, при якому з ймовірністю 0,7698 можна очікувати, що відносна частота появи числа події відхилиться від його імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02. *Відповідь:* 900.

3.62. Імовірність появи події А в кожному з 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. В яких межах з ймовірністю 0,99 знаходиться частота появи події?

Відповідь: $\square = 20,\ 300 < k < 340.$

3.63. Стрілець влучає у мішень одним пострілом з пістолета з імовірністю 0,8. Яка ймовірність того, що при 500 пострілах частота влучень в мішень відхилиться від імовірності Р не більше ніж на 0,04 (по абсолютній величині)?

Відповідь: 0,9488.

3.64. Імовірність появи події А в кожному з 10000 незалежних випробувань постійна і дорівнює Р = 0,75. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,0001.

Відповідь: 0,182.

3.65. Снайпер влучає у мішень кожним з 800 пострілів з імовірністю 0,3. В яких межах буде знаходитися відносна частота влучень, щоб ймовірність невиходу за ці межі дорівнювала 0,9624?

Відповідь: $0{,}3 \pm\ 0{,}0337$.

3.66. Подія А і з`являється в кожному з незалежних випробувань з постійною імовірністю р = 0,2. Знайти величину відхилення щодо частоти появи подій від його ймовірності, яку можна очікувати з імовірністю р = 0,9128 в 5000 випробуваннях.

Відповідь: 0,00967.

3.67. Хлопчик влучає з рогатки у горобця з імовірністю 0,3. Яку кількість пострілів потрібно зробити, щоб з ймовірністю 0,996 відхилення частоти потрапляння від імовірності не перевершило по абсолютній величині 0,04?

Відповідь: 1089.

3.68. Скільки разів потрібно кинути монету, щоб з ймовірністю, яка дорівнює 0,6, очікувати відхилення відносної частоти появи герба від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01?

Відповідь: 1764.

3.69. На заводі проводять масове виробництво продукції зі сталим процесом виробництва. 4% виробів виходять бракованими. Скільки виробів слід вибрати, щоб з ймовірністю 0,99 можна було стверджувати, що серед них частка бракованих по абсолютній величині відрізняється від ймовірності браку не більше ніж на 0,02?

Відповідь: 639.

3.70. Імовірність того, що людина помре на 21-му році життя дорівнює 0,006. При настанні страхового випадку компанія виплачує спадкоємцям 500 гривень. На рік застраховано 10000 чоловік у віці 20 років. Який слід встановити мінімальний страховий внесок, щоб ймовірність страхової компанії виявитися під кінець року зі збитками була не більша 0,1?

Відповідь: 3,5 р.

4. ВИПАДКОВІ ДИСКРЕТНІ ВЕЛИЧИНИ

Числова величина називається випадковою, якщо вона може прийняти одне з можливих значень, що відомі заздалегідь.

Якщо множина значень випадкової величини X дискретне, тобто

$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, *то випадкова величина називається дискретною.*

Наприклад, число бракованих деталей в випадково відібраній партії, кількість світлофорів, які проїхав автомобіль без зупинки, число хлопчиків, що народилися за добу у вибраній країні – дискретні величини.

Добутком числа α на випадкову величину X називають величину Y= αX, можливі значення якої дорівнюють αx_i , *де* $x_i \in X$.

Сумою двох випадкових величин X та Y називається випадкова величина $Z = X + Y$, *можливі значення якої дорівнюють* $x_i + y_j$, $x_i \in X$, а $y_i \in Y$.

Добутком двох випадкових величин X та Y називається випадкова величина $Z = XY$, *можливі значення якої дорівнюють* $x_i y_j$, де $x_i \in X$, а $y_j \in Y$.

Закон розподілення. Функція розподілення.

Прийняття випадковою величиною X одного з можливих своїх значень можна розглядати як випадкову подію. Кожній випадковій події можна поставити у відповідність ймовірність її появи.

Нехай задана випадкова величина $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Події $X = x_i, (i = \underline{1, n})$ *створюють повну групу, тобто виконані наступні умови:*

а) $(X = x_i)(X = x_j) = \emptyset,\ (i, j = \underline{1, n}),\ i \neq j;$

б) $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$

Законом розподілення випадкової дискретної величини X (ВДВ) називають співвідношення, що встановлює зв'язок між подіями

$X = x_i, (i = \underline{1, n})$ *та ймовірностями їх появи. Одним із способів задання закону розподілу є табличний спосіб:*

X	$x1$	$x2$	…	xi	…	x_n
p_i	$p1$	$p2$	…	pi	…	p_n

Тут $p_i = P(X = x_i)$ та $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. *Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла інша.*

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція F(x), що задає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше, ніж x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Для випадкової дискретної величини X функція розподілення приймає вигляд $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$.

4.2. Серед 8 деталей є п'ять стандартних. Скласти закон розподілу числа стандартних деталей серед 4 вибраних.

X	1	2	3	4

p_i	1/14	6/14	6/14	1/14

Відповідь:

4.3. На завод привозять сировину автомашинами від трьох незалежних постачальників. Імовірність прибуття автомашини від першого постачальника дорівнює 0,2, від другого - 0,3, від третього - 0,1. Скласти закон розподілу числа прибулих автомашин.

X	1	2	3	4
p_i	0,504	0,398	0,092	0,006

Відповідь:

4.4. Стрілець робить 4 постріли в мішень. Складіть закон розподілу числа влучень, якщо ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,1.

X	0	1	2	3	4
p_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Відповідь:

4.5. В лабораторії провели послідовні випробування п'яти приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується тільки тоді, коли попередній прилад виявився надійним. Побудувати ряд розподілу числа випробуваних приладів, якщо надійність (ймовірність витримати випробування) кожного з них дорівнює 0,9. Побудувати графік розподілу.

X	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

Відповідь:

4.6. Випадкова величина X може набувати таких значень: $x_1 = 2, x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Відомі ймовірності перших двох можливих значень: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}15$. Знайти $p_3 = P(X = 8)$.

Відповідь: 0,45

X	0	1	2	3
p_i	0,579	0,347	0,069	0,005

4.7. Гральний кубик підкинули три рази. Скласти закон розподілу числа появи четвірки.

Відповідь:

X	0	1	2	3

p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

4.8. Скласти закон розподілу числа настання події А в 3 незалежних випробуваннях, якщо ймовірність настання події А в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

Відповідь:

4.9. У приймачі шість ламп (всі різні), одна з них перегоріла. Для усунення несправності навмання обрану лампу замінюють придатною з запасного комплекту, після чого відразу перевіряється робота приймача. Скласти закон розподілу числа замінених ламп.

X	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Відповідь:

4.10. Імовірність ураження цілі одним пострілом дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу числа пострілів, зроблених до першого ураження цілі.

X	0	1	2	…	n	…
p_i	0,4	0,24	0,144	…	$0,6^{n-1} \times 0,4$	…

Відповідь:

4.11. За допомогою серії однакових приладів проводиться дослід. Прилади вмикаються один за одним з інтервалом 5 с. Час спрацювання приладу 16 с. Дослід припиняється відразу ж після отримання успішного результату на якомусь приладі. Знайти ряд розподілу числа включених приладів, якщо ймовірність успішного результату досвіду на кожному приладі дорівнює 0,5.

X	4	5	6	…	n	…
p_i	0,5	0,25	0,125	…	$0{,}5^{n-3}$	…

Відповідь:

4.12. На складі лежить n лампочок, кожна з них з імовірністю p має дефект. Лампочку вкручують в патрон, після чого подають струм. Якщо лампочка перегорає, її відразу ж замінюють іншою. Дослід закінчується, якщо включена лампочка не перегорить. Розглядається випадкова величина X - число лампочок, які будуть випробувані. Побудувати її ряд розподілу.

X	1	2	…	n -1	n
p_i	q	pq	…	$p^{n-2}q$	p^{n-1}

Відповідь:

4.13. Знайти функцію розподілу числа влучень у мішень, якщо стрілець робить 6 пострілів, а ймовірність влучення у ціль при одному пострілі дорівнює 0,2. Використовуючи цю функцію, обчислити вірогідність того, що ціль буде уражена не менше одного, але не більше п'яти разів.

Відповідь: $P(1 \leq k \leq 5) = 0{,}7378$.

X	0	1	2	3	4	5	6
pi	0,2621	0,3932	0,2458	0,0819	0,0154	0,0015	0,0001

4.14. Скільки горіхів повинні містити плитки шоколаду для того щоб ймовірність мати хоча б один горіх у плитці була 0,99. Передбачається , що розподіл ймовірності числа горіхів у плитці підпорядковується закону Пуссонна.

Відповідь: 5

4.15. У лотереї, в якій розігрують три речі, які коштують - 200, 60 і 30 грн, усього 1000 квитків. Скласти закон розподілу величини виграшу для особи, що має 1 квиток.

X	0	30	60	210
pi	0,997	0,001	0,001	0,001

Відповідь:

4.16. Ймовірність тог що на 4 офіційних сайтах університету є необхідна студенту інформація рівна 0,3. Скласти закон розподілу числа сайтів, які відвідає студент для того щоб взяти потрібну йому інформацію.

X	1	2	3	4
p_i	0,3	0,21	0,147	0,343

Відповідь:

4.17. Нехай *X* та *Y* - числа очок, які вибивають два стрільці , що роблять по одному пострілу. Відомі закони розподілу випадкових величин *X* та *Y*.

X	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Y	2	3	4	5
q_j	0,1	0,1	0,5	0,3

Скласти закон розподілу суми чисел очок, які вибивають обидва стрілці.

$X+Y$	5	6	7	8	9	10
r_k	0,01	0,05	0,14	0,28	0,37	0,15

Відповідь:

4.18. Дані закони розподілу двох випадкових величин *X* та *Y:*

X	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	3
q_j	0,1	0,3	0,6

Скласти закон розподілу випадкової величини *X* та *Y*.

X Y	-3	-1	0	1	3
r_k	0,12	0,06	0,37	0,15	0,3

Відповідь:

4.19. Дані дві незалежні випадкові величини X_1 та X_2, задані законами розподілу :

X_1	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

X_2	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Скласти закони розподілу випадкових величин $X = X_1 + X_2$, $Y = X_1 X_2$.

Відповідь:

X	-1	0	1	2	3	4
r_k	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,20

Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
q_j	0,08	0,06	0,04	0,37	0,10	0,15	0,20

4.20. Ймовірність попадання у ціль із гвинтівки рівна 0,4. Стрілець робить 6 пострілів. Скласти закон розподілу числа:

а) X_1 попадань у ціль;

б) X_2 промахів.

Відповідь:

X_1	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004
X2	0	1	2	3	4	5	6
pi	0,004	0,037	0,138	0,276	0,311	0,187	0,047

4.21. На змаганнях виступають два стрільці. Числа очок , що вибиває кожен із них є випадковими величинами X_1 та X_2, які задані законами розподілу:

X_1	3	4	5
p_i	0,3	0,4	0,3

X_2	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Кожен з учасників змагання робить по одному пострілу. Скласти закон розподілу числа очок, що вибиває команда.

Відповідь:

X	5	6	7	8	9	10
p_i	0,06	0,11	0,16	0,26	0,26	0,15

4.22. Дані дві незалежні випадкові величини X_1 та X_2, що задані законами розподілу :

X_1	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

X_2	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Скласти закони розподілу випадкових величин $X = X_1 + X_2$, $Y = X_1 X_2$.

Відповідь:

X	-1	0	1	2	3	4
p_i	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,20

Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,08	0,06	0,04	0,37	0,10	0,15	0,20

4.3 Числові характеристики випадкових дискретних величин

4.23 У коробці з 8 кульок - 5 червоних. Знайти математичне очікування числа червоних кульок серед 4 відібраних.

Відповідь: 5/2.

4.24. Завод створює залізні, дерев'яні та пластмасові деталі, які виготовляють незалежно один від одного. Ймовірність того що деталь буде залізною 0,2, дерев'яною - 0,3, пластмасовою - 0,1. Знайти математичне очікування числа виготовлених деталей.

Відповідь: 0,6.

4.25. Ймовірність влучень при 1 пострілі рівна 0,1.Знайти математичне очікування числа влучень у ціль при 4 пострілах.

Відповідь: 0,4; безпосередньо і з наслідку – 3.

4.26. Знайти математичне очікування числа влучень у ціль, якщо стрілець робить 4 постріли з ймовірністю P_1=0, P_2=0,4,P_3 =0,5,P_4 =0,7.

Відповідь: M(X) = 2,2.

4.27. В лотереї розігрується самокат за 50 доларів, скутер який коштує 250 доларів та телефон за 40 дол. Знайти математичне очікування виграшу для особи, яка має один квиток , якщо загальне число квитків рівне 100.

Відповідь: 3 дол. 40 цент.

4.28. Завод тестує 10 деталей на надійність. Ймовірність, того що деталь відмовить за час випробувань, рівна 0,2. Знайти математичне очікування числа деталей, що відмовили.

Відповідь: 2.

4.29. Знайти математичне очікування множення числа очок, які могуть випасти при одному підкиданні 2 гральних кубиків.

Відповідь: 12,25.

4.30. Побудувати многокутник розподілу та фунуцію розподілу випадкової величини X. Випадкова величина x підкорена закону Пуассона із математичним очікуванням a=3. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме :а) значення, що менше за математичне очікування; б) додатнє значення.

Відповідь: а) 0,423; б) 0,95.

4.31. Потік заявок у інтернет-магазині є найпростішим(стаціонарний пуассонівський) потоком. Знайти ймовірність того, що за хвилину буде не більше 2 викликів, якщо математичне очікування кількості викликів за годину - 30.

Відповідь: 0,0902

4.32. Випадкові величини X та Y задані законами розподілу :

а)

X	1	3
p_i	0,4	0,6

Y	0,2	0,5	0,7
q_i	0,1	0,6	0,3

б)

X	-1	1
p_i	0,6	0,4

Y	1	3
q_i	0,7	0,3

Знайти математичне очікування випадкової величини X + Y двома способами:

1) скласти закон розподілу цієї випадкової величини ;

2) користуючись властивістю математичного очікування суми двох випадкових величин.

Відповідь: 1) 2,73; 2) 1,4.

4.33. Незалежні випадкові величини X та Y задані законами розподілу :

X	1	2
p_i	0,2	0,8

Y	0,5	1
p_i	0,3	0,7

Знайти математичне очікування випадкової величини X + Y двома способами: 1) скласти закон розподілу цієї випадкової величини ;

2) коричтуючись властивістю математичного очікування суми двох випадкових величин.

Відповідь: 1,53.

4.34. На змаганнях виступають два стрільці. Числа очок , що вибиває кожен із них є випадковими величинами X_1 та X_2, які задані законами розподілу:

X_1	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

X_2	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Кожен з учасників змагання робить по одному пострілу. Скласти закон розподілу числа очок, що вибиває команда.

Відповідь: 8 = 4+4; безпосередньо і за властивістю 2.

X	5	6	7	8	9	10
p_i	0,06	0,11	0,16	0,26	0,26	0,15

Середнє квадратичне відхилення

Дисперсія

Нехай нам відомий закон розподілення випадкової дискретної величини

$X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

X	$x1$	$x2$	…	xi	…	x_n
p_i	$p1$	$p2$	…	pi	…	p_n

Дисперсією випадкової величини X називається числова величина, що позначається як D(X) і дорівнює: $D(X)=M((X-M(X))^2)$.

Властивості дисперсії

1. $D(C) = 0$.

2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, *якщо X і Y незалежні випадкові величини.*

Доведення. $D(X \pm Y) = M(((X \pm Y) - M(X \pm Y)^2)=$

$$= \left(\left(\left(X - M(X)\right) \pm \left(Y - M(Y)\right)\right)^2\right) =$$

$$= M((X - M(X))^2 + \left(Y - M(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - M(X)\right)\left(Y - M(Y)\right) =$$

$$= M((X - M(X))^2 + \left(Y - M(Y)\right)^2) =$$

$$= M((X - M(X))^2) + M((Y - M(Y))^2) = D(X) + D(Y)$$

Наслідки:

1. $D(X - M(X)) = 0$.

2. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

3. *Дисперсія числа появи події А у схемі Бернулі дорівнює прq.*

Середньоквадратичне відхилення

$$\square(\square) = \sqrt{D(X)}$$

4.35. У коробці з 8 кульок - 5 червоних. Знайти дисперсію числа червоних кульок серед 4 відібраних..

Відповідь: 15/28, за визначенням та формулою.

4.36. Завод створює залізні, дерев'яні та пластмасові деталі, які виготовляють незалежно один від одного. Ймовірність того що деталь буде залізною 0,2, дерев'яною - 0,3, пластмасовою - 0,1. Знайти дисперсію числа виготовлених деталей.

Відповідь: 0,46.

4.37. Знайти дисперсію числа влучень у мішень при чотирьох вистрілах, якщо ймовірність влучення при одному вистрілі дорівнює 0,1.

Відповідь: 0,36; безпосередньо і в наслідок 3.

4.38. Команда складається з двох стрільців. Кількість очок, що вибиває кожен з них, є випадковими величинами x_1 і x_2 , заданих наступними законами розподілення:

X_2	2	3	4	5
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

X_1	3	4	5
p_i	0,3	0,4	0,3

Кожен учасник команди стріляє один раз. Знайти дисперсію кількості очок, вибитих командою.

Відповідь: 2 = 0,6 + 1,4; безпосередньо і за властивістю дисперсії 2.

X	5	6	7	8	9	10
p_i	0,06	0,11	0,16	0,26	0,26	0,15

4.39. Випадкова величина *X* задана за законом розподілення:

X	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Побудувати багатокутник розподілу. Записати вираз функції розподілу. Побудувати графік функції *F(x).* Знати математичне очікування, дисперсію випадкової величини. Знайти ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення, що не перевищує 1 за абсолютною величиною.

Відповідь: *M(X)* = 0,2; *D(X)* = 1, 36 ; $P(|X|\le 1) = 0{,}8$.

4.40. Ціль складається з кола та двох концентрованих кілець №1 та №2. Влучення в коло дає 10 балів, в кільце №1 – 5 балів, в кільце №2 – 1 бал. Ймовірності влучити в коло та кільця №1, 2 дорівнюють відповідно 0,5, 0,3, 0,2. Для суми балів, що були набрані в результаті двох влучень, побудувати ряд розподілення, знайти математичне очікування та дисперсію.

X	-2	4	9	10	15	20
p_i	0,4	0,12	0,2	0,09	0,3	0,25

Відповідь:

$M(X) = 12{,}6$; $D(X) = 36{,}02$.

4.41. Прилад, який випробовують, складається з 5 елементів. Ймовірність відмови елементів з номером і, ($i = \overline{1,5}$) визначається за формулою $p_i = 0{,}2 + 0{,}1(i - 1)$. Визначити математичне очікування і дисперсію числа елементів, які відмовили, якщо відмови елементів проходять незалежно один від одного.

Відповідь: $M(X) = 2$, $D(X) = 1{,}1$.

4.42. Знайти математичне очікування і дисперсію:

1) числа очок при одному кидку гральних кубиків;

Відповідь: 3,5; 35/12.

2) суми очок при одному кидку двох гральних кубиків.

Відповідь: 7; 35/6.

4.43. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,1. З партії контролер бере деталь і перевіряє її якість. Якщо вона виявляється нестандартною, подальші випробування припиняються, а партія затримується. Якщо ж деталь виявиться стандартною, то контролер бере наступну. Але все він перевіряє не більше п'яти деталей. Обчислити математичне сподівання і дисперсію числа перевірених деталей.

X	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561	0,59049

Відповідь:

M(X) = 3,7;

D(X) = 3,298.

4.44. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 5. Знайти дисперсію випадкових величин: а) $X - 1$; б) $-2X$; в) $3X + 6$.

Відповідь : а) 5; б) 20; в) 45.

4.45. Випадкова величина X може набути двох значень: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0,3$ та x_2 з ймовірністю $p_2 = 0,7$, причому $x_2 > x_1$. Знайти значення $x1$ і x_2, знаючи, що $M(X) = 2,7$ і $D(X) = 0,21$.

Відповідь: 2; 3.

4.46. Знайти дисперсію випадкової величини X числа появи події A в двох незалежних випробуваннях, якщо математичне очікування дорівнює 0,8.

Відповідь: 0,48.

4.47. Знайти дисперсію випадкової величини X числа появи події в 100 незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює 0,7.

Відповідь:21.

4.48. Знайти ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі і кількість усіх пострілів, якщо середню кількість влучень дорівнює 72, а середнє квадратичне відхилення випадкової величини, що характеризує кількість влучень, дорівнює 6.

Відповідь: $p = 0,5$; $n = 144$.

4.49. Випадкова величина X задана наступним законом розподілу:

X	2	4	8
p_i	0,1	0,5	0,4

Знайти середнє квадратичне відхилення цієї величини.

Відповідь: 2,2.

4.50. Випадкова величина X розподілена за наступним законом:

X	2	4	8
p_i	0,1	0,5	0,4

Знайти $M(X^4)$ і $D(X^4)$.

Відповідь: 0,7; 0,21.

5. ВИПАДКОВІ НЕПЕРЕРВНІ ВЕЛИЧИНИ

Якщо більшість значень випадкової величини X це неперервний числовий проміжок, то випадкова величина має назву неперервна. Наприклад, наступні випадкові величини: дальність польоту артилерійського заряду, розмір заданого параметру виготовленої деталі, час безаварійної роботи станку, є неперервними.

5.1. Функція розподілу. Щільність розподілу.

$F(x) = P(X < x)$ *– функція розподілу.*

Властивості функції розподілу:

1. *$0 \leq F(x) \leq 1$; $F(x)$ – неперервна функція.*
2. *$F(x)$ – незростаюча функція: $\forall\, x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.*

Введемо наступні події:

$A = (X < x_1)$, $B = (X < x_2)$, $C = (x_1 \leq X < x_2)$.

Тоді $A + C = B$, $P(B) = P(A) + P(C) = P(B) - P(A)$. Так як

$P(A) = F(x_1)$, $P(B) = F(x_2)$ та $P(C) \geq 0$, то виходить, що $F(x_1) = F(x_2)$

3. $F(x) = 0$; $F(x) = 1$;
4. *$P(X{=}\alpha) = 0$, так как*

$P(\alpha \leq X \leq \beta) = (F(\beta) - F(\alpha)) \rightarrow P(\alpha) = 0$

Наслідок: $P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Ґрунтуючись на наслідку з властивості 4 – функції розподілу – запишемо наступну рівність:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x);$$

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

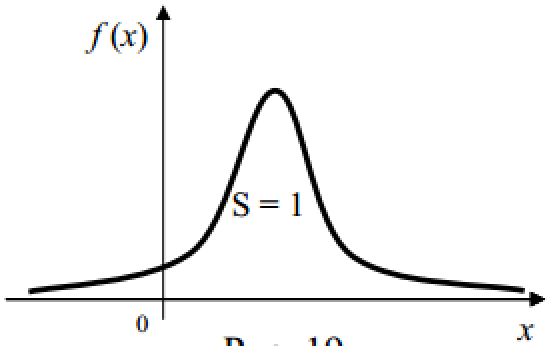
Щільністю розподілу ймовірностей є функція $f(x) = F'(x)$, відповідно $P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(c)\Delta x \approx p(x)$, що і пояснює назву функції $f(x)$. Графік щільності розподілу $f(x)$ називається кривою розподілу.

Властивості щільності розподілу:

1. $f(x) \geq 0$*, так як* $f(x) = F'(x)$, *а* $F(x)$ *– зростаюча функція.*

2. $P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ – *геометрична інтерпретація:*



4. $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F9x).$

5.1. Дана функція розподілу

$$F(x) = \{0, x < \frac{\pi}{4}, \square\ \square\square\square\ sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}, 1, x > \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти: 1) значення параметра а;

2) обрахувати $P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) побудувати графік функції розподілу.

5.2. Дана функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X:

$$F(x) = \{0, x < 0, \frac{x^2}{1 + x^2}, x \ge 0.$$

Знайти: щільність розподілу $f(x)$; 2) $P(1 \le X \le 2)$.

Відповідь: $f(x) = \{0, x < 0, \frac{2x}{(1+x^2)^2}, x \ge 0$, 2) 0,3.

5.3. Дана щільність розподілу

$$f(x) = \{0, x < 0, a(x-3)^2, 0 \le x \le 3, 0, x > 3.$$

Знайти: 1) значення параметру *a;* *Відповідь:*1/9.

2) знайти $P\left(\frac{3}{2} \le x \le 4\right)$; *Відповідь:* 1/8.

3) знайти *F(x).*

Відповідь: $F(x) = \{0, x < 0, \frac{(x-3)^3}{27} + 1, 0 \le x \le 3, 1, x > 3.$

4) побудувати графік функції $f(x)$ та $F(x)$.

5.4. Функція $f(x) = \frac{A}{1+x^2,}, (-\infty < x < \infty)$ – щільність ймовірності випадкової величини *X*. Знайти значення коефіцієнта *A* та функцію розподілу випадкової величини *X*, визначити ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення: а) не менше 0, але не більше 5; б) не більше 3.

Відповідь: $A = \frac{1}{\pi}$; $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, x$,

$$P(0 \le X \le 5) = 0{,}437; \qquad P(-\infty < X \le 3) = 0{,}898.$$

5.5. Функція $(x) = \frac{2A}{e^x + e^{-x}}, (-\infty < x < \infty)$, є щільністю ймовірності випадкової величини *X*. Обрахувати значення коефіцієнту. Знайти ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення: а)не менше 0, але не більше 2; б) менше, ніж 1.

Відповідь: $A = \frac{1}{\pi}$; а) $P(0 \le X \le 2) = \frac{2}{\pi}\left(arctge^2 - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}414$;

б) $P(-\infty < X < 1) = \frac{2}{\pi} arctg\, e = 0{,}776$.

5.6. Функція $f(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}, (-\infty < x < \infty)$ - щільність ймовірності випадкової величини X. Знайти: а) значення коефіцієнту А; б) ймовірність того, що вона набуде значення, не менше 1; в) знайти функцію розподілу.

Відповідь: а) $2/\pi$; б) $P(X \le 1) = 1 - \frac{2arctg\, e}{\pi} = 0{,}224$, в) $F(X) = \frac{2}{\pi} arctge^x$

5.7. Функція $f(x)$ дорівнює нулю при $-\infty < x < 1$ і дорівнює $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}^4}$, якщо $1 \le x \le +\infty$. Знайти: а) значення *A*, при якому ця функція буде щільністю ймовірності деякої випадкової величини *X*; в) ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення з інтервалу (2;4); г)ймовірність того, що в чотирьох незалежних випробуваннях вона ні разу не влучить в інтервал (1;2).

Відповідь: а) 3; б) $F(X) = \{0, -\infty < x < 1, 1 - \frac{1}{x^3}, 1 \le x < +\infty$

в) 7/24; г) $0{,}125^4 = 0{,}000244$.

5.2. Числові характеристики випадкових неперервних величин

Математичне очікування

$$P(x_i \le X \le x_i + \Delta x_i) = F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i) = F'(\underline{x_i})\Delta x_i = f(\underline{x_i})\Delta x_i \approx p_i.$$

$\sum_{i=1}^{n} \underline{x_i} f(\underline{x_i}) \Delta x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \to M(X) = \int_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx$ – *визначення математичного очікування.*

5.8. Дана щільність розподілу:

$$f(x) = \{0, x < 0, asinx, 0 \le x \le \pi, 0, x > \pi$$

Потрібно: 1) знайти значення параметру a; Відповідь: ½;

2) обрахувати значення M (X), D (X) та σ(X)

Відповідь : $\frac{?}{2}, \frac{\pi^2-8}{4} \approx 0{,}47; 0{,}684.$

3) обрахувати $P(\frac{\pi}{3} \le X \le \frac{\pi}{2})$

4) побудувати графік функції $f(x)$ та $F(x)$.

5.9. Графік щільності імовірності випадкової величини X має вигляд

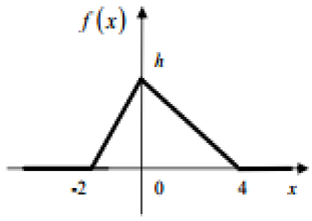


Рис. 20

Знайти щільність розподілу, математичне очікування, дисперсію, інтегральну функцію (побудувати її графік)

Відповідь: 2/3, 14|9;

$$f(x) = \{0, x \le -2, \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}, -2 \le x \le 0, -\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}, 0 \le x \le 4, 0, x > 4; \qquad F(x) = \{0, x \le -2, \frac{1}{12}(x+2)^2. -2 \le x \le 0, 1 - \frac{1}{24}(x-4)^2, 0 \le x \le 4, 1, x > 4.$$

5.10. Знайти математичне очікування та дисперсію випадкової величини X, якщо її щільність імовірності $f(x) = \frac{2}{\pi}cos^2x$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і дорівнює нулю при $|x| \ge \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $M(X) = 0, D(X) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2\pi} = 0.663.$

5.11. Крива розподілення випадкової величини X являє собою верхню половину еліпса з півосями a та b і центром на початку координат. Величина a відома. Необхідно знайти: а) величину b та щільність імовірності; б) математичне очікування та дисперсію випадкової величини X ; в) функцію розподілення $F(x)$.

Відповідь: а) $\frac{2}{\pi\alpha}, f(x) = \{0, x < -a, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a, 0, x > a;$

б) $M(X) = 0, D(X) = \frac{a^2}{4};$

в) $F(x) = \{0, x < -a, \frac{1}{\pi\alpha^2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2\pi}{2}\right) 1, x > a., -a \leq x \leq a,$

5.12. Щільність імовірності випадкової величини X задана функцією $f(x) = \{3x^2, 0 < x \leq 1, 0, x \leq 0$ та $x > 1$. Знайти медіану, математичне очікування, моду випадкової величини *X*. Знайти функцію розподілення і побудувати її графік.

Відповідь : $\frac{3}{4}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 1; F(x) = \{0, x \leq 0, x^3, 0 < x \leq 1, 1, x > 1.$

5.12 Довільно кинута точка в круг радіуса R. Імовірність попадання точки в будь-яку область , що знаходиться всередині круга, пропорційна площі цієї області. Знайти функцію математичне очікування, функцію розподілення та дисперсію відстані від точки до центра круга.

Відповідь: $F(x) = \{0, x \leq 0, \left(\frac{x}{R}\right)^2, 0 < x < R, M(X) = \frac{2}{3}R, D(X) = \frac{R^2}{18}, 1, x > R.$

5.3 Окремі випадки розподілення

Рівномірне розподілення

$$f(x) = \{\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b, 0, x < a, x > b.$$

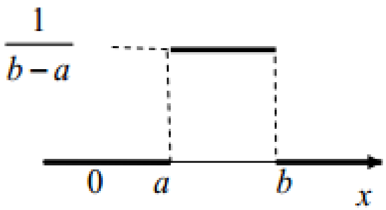


Рис. 21

$$F(x) = \{0, x < a, \frac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, 1, x > b.$$

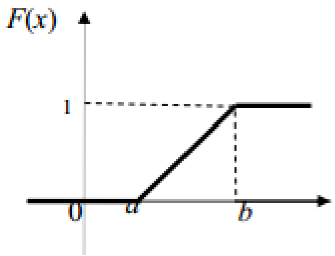


Рис. 22

Для рівномірного розподілення:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, P(\alpha \le x \le \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показникове розподілення

$f(x) = \{0, x < 0,\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0.\ \lambda > 0$

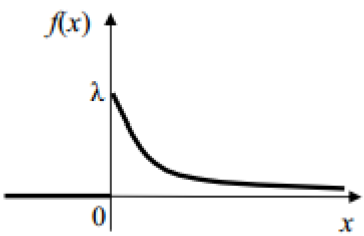


Рис. 23

$F(x) = \{0, x < 0, 1 - e^{-\lambda e}$

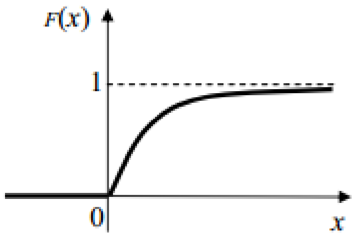


Рис. 24

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}, P(\alpha \leq x \leq \beta) = e^{-\beta x}.$$

Нормальне розподілення

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

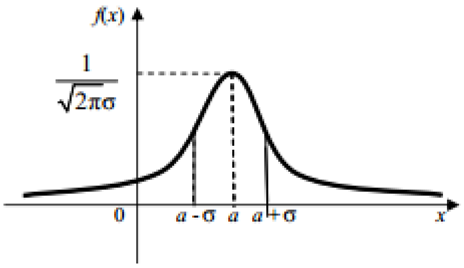


Рис. 25

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} \quad e^{\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2} dt.$$

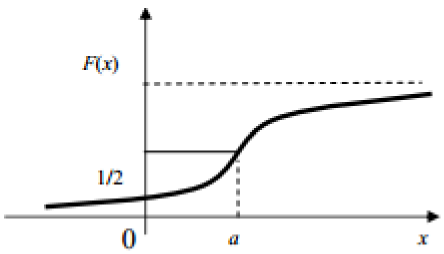


Рис. 26

$$M(X) = a, D(X) = \sigma, f(x) = N(a, \sigma), N(a, \sigma), N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2} = \varphi(x).$$

$$P(a \le X \le \beta) = Q\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), P(|X - a| < \varepsilon) = 2Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Правило трьох сигм: $P(|X - a| < 3\varepsilon) = 2Q(3) = 0{,}9973$

5.14. Випадкова величина розподілена нормально з параметрами a=8 и о=3. Знайти P(12,5 < X <14).

Відповідь: 0,044.

5.15. Випадкова величина X розподілена рівномірно . Відомо, що *M(X*) = 4, *B(X*) = 3. Знайти щільність імовірності випадкової величини X та побудувати її графік.

1, x < 1, x > 7,

Відповідь: $f(x) = \{0, x < 1, x > 7, \frac{1}{6}, 1 \le x \le 7.$

5.16. Випадкова величина X являється сумою 100 величин, які маю однакові математичні очікування *M* =2 та диспарсію *Б* ($X_к$) = 0,16. Знайти імовірність того,що можливі значення випадкової величини X будуть в межах від 195 до 206.

Відповідь: P (195 < X < 206) = 0,8276.

5.17. Випадкова величина X являеться сумою 50 незалежних величин $X_к$, у яких *M* ($X_к$) = 5, *B* ($X_к$) = 0,5. Знайти імовірність того,

що відхилення випадкової величини X від математичного очікування по абсолютній величині не буде перевищувати 3.

Відповідь : P(|x- 5| < 3) = 0,903.

5.18. Деталь, виготовлена автоматом, рахуеться придатною , відхилення її розміру від проектного , яке підпорядковується нормальному закону з параметрами a = 20 и σ = 5, не перевищує 10 мм. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

Відповідь: 95,44%.

5.19. Розмір довжини деталі розподілений по нормальному закону з параметрами a = 5 и σ = 0,9. Знайти границь, в яких з імовірністю 0,95 лежить розмір довжини деталі.

Відповідь: [3,236; 6,764].

5.20. Випадкова похибка вимірювань підпорядкована нормальному закону розподілення з параметрами a = 0 и σ = 9 мм. Проводяться три незалежних вимірювань. Знайти імовірність того, що похибка хоча б одного вимірювання не перевершить по абсолютній величині 3 мм.

Відповідь: ($1-0{,}7414^3 = 0{,}5\,921$).

5.21. Літак скинув бомби на міст довжиною 60 м и шириною 12 м. Розсіювання влучень проходить по нормальному закону з дисперсією 225 $м^2$ по довжині та 36 по ширині; середня точка попадань- центр моста. Розсіювання по довжині та ширині незалежні . Знайти імовірність влучення в міст про скиданні однієї бомби.

Відповідь: 0,6515.

5.22. Діаметр деталей являється випадковою величиною, розподіленою по нормальному закону. Дисперсія - 0,0001 см , математичне очікування - 2,5 см. В яких рамках можна практично гарантувати діаметр деталі (за практично вірогідну приймається подія, вірогідність якої 0,9973)?

Відповідь: [2,47; 2,53].

5.23. Зріст дорослого чоловіка являється випадковою величиною , розподіленою по нормальному закону. Нехай математичне очікування - 170 см, а дисперсія - 36 $см^2$. Знайти щільність імовірності і функцію розподілення тієї випадкової величини.

Вичислить імовірність того, що хоча б один з чотирьох чоловіків буде мати зріст не менше 172 і не більше 180 см.

Відповідь: 0,7033.

5.24. Довжина деталі представляє собою випадкову величину, розподілену по нормальному закону з параметрами a = 15 см, σ = 0,2 см. Знайти імовірність браку , якщо допустимі значення довжини деталі має бути 15 ± 0,8 см. Яку точність виготовленої автоматом деталі можна гарантувати з імовірністю 0,97? *Відповідь:* $P(|X - a| > 0{,}3) = 0{,}1336$; δ = 0,436.

5.25. Автомат виготовляє заклепки. Діаметр їх головок – випадкова величина, розподілена по нормальному закону – має середнє значення, равное 2 мм, і дисперсію 0,01 мм^2. Які розміри діаметра головок заклепки можна гарантумати з імовірністю 0,95?

Відповідь: $1{,}8 \leq X \leq 2{,}2$.

ДОДАТОК 1

Таблиця значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0780	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0574	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0412	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0170
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001

ДОДАТОК 2

Таблиця значень функції Лапласа

$$\hat{O}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736

2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997

ДОДАТОК 3

ТАБЛИЦЯ РОЗПОДІЛУ СТ'ЮДЕНТА

Рівень значущості								
Двосторонній Односторонній	0,5 0,25	0,20 0,10	0,10 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01	0,01 0,005	0,002 0,001	0,001 0,0005
Число ступенів вільності	Критичні точки							
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	'2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375	3,633

32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356	3,611
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
36	0,681	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
37	0,681	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	3,326	3,574
38	0,681	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
39	0,681	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	3,313	3,558
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,680	1,296	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
Нескінченність	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291